UNTERSUCHUNGEN ZUR KOMPLEXITÄT VON BERECHNUNGEN MIT VERZWEIGUNGEN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Dipl.-Math. Rainer Zinn
aus Völksen

Göttingen 1975

UNTERSUCHUNGEN ZUR KOMPLEXITÄT VON BERECHNUNGEN MIT VERZWEIGUNGEN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Dipl.-Math. Rainer Zinn
aus Völksen

Göttingen 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D7

Referent : Prof.Brosowski

Korreferent : Prof.Kreß

Tag der mündlichen Prüfung : 31.10.1975

Inhalt

	Einleitung	S. 1
1.	Berechnungen ohne Verzweigungen in partiellen Algebren	S.13
2.	Partielle Algebren mit Verzweigungen	S.22
3.	Die Rechenzeiten L^* , L^*_{min} und T^*	S.32
4.	Rechenzeiten in beliebigen Systemen von Palgebren mit Verzweigungen	S.54
5.	Zusammenhang zwischen Berechnungen mit und ohne Verzweigungen	S.67
6.	Irreduzible Mengen von Palgebren	S.75
7.	Hauptaussagen über Berechnungen mit Verzweigungen und Anwendungen	S.84
8.	Näherungsberechnungen und Anwendungen	S.101
	Literaturverzeichnis	S.110

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534917_0026

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden Rechenzeiten von Berechnungen in EDV-Anlagen mit algebraischen Mitteln untersucht. Dabei steht die Frage im Mittelpunkt, ob der Verzicht auf Verzweigungen bei Programmen, etwa bei einem ALGOL-Programm, eine Einschränkung bedeutet und, wenn ja, in welchem Maße. Die Anregung zu dieser Untersuchung gab eine Arbeit von Strassen[19], in der gezeigt wird, daß die Länge und die Tiefe einer Berechnung, das ist bei Strassen ein Programm ohne Verzweigungen, unter bestimmten Voraussetzungen für fast alle Eingabedaten nicht größer sind als die eines Programms, das die gleichen Ergebnisse berechnet. Die Länge und die Tiefe sind dabei interpretierbar als die Rechenzeiten bei serieller bzw. paralleler Ausführung. In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Berechnungsbegriff erklärt, mit dem man auch gewisse Verzweigungen erfassen kann. Die Rechenzeiten dieser Berechnungen mit Verzweigungen werden definiert und verglichen mit den Rechenzeiten von Strassen´schen Berechnungen. Betrachtet man anstelle von Programmen die Berechnungen mit Verzweigungen, so kommt man zu einem dem Strassen´schen Satz analogen Ergebnis, wobei die Berechnungen mit Verzweigungen zwar eine Einschränkung gegenüber den Programmen bedeuten, man andererseits aber mit weniger Voraussetzungen als Strassen auskommt.

Wie in vielen wichtigen Arbeiten der Komplexitätstheorie (z.B. Belaga[1], Borodin[4], Ostrowski[13], Pan[14], Paterson/Stockmeyer[15], Strassen[18,20], Winograd[21]) wird die Komplexität einer Berechnung nur durch die auszuführenden Rechenoperationen ausgedrückt. Unberücksichtigt bleiben

Zugriffszeiten, Speicherplatzbedarf, Stabilität etc. ; Überlegungen dieser Art findet man etwa bei Miller [10] und Spieß [16]. Die zu berechnenden Größen werden als Elemente einer partiellen Algebra aufgefaßt, das heißt einer algebraischen Struktur, deren Operationen nur partiell erklärt sein können. Jeder Operation in dieser partiellen Algebra wird eine nichtnegative reelle Zahl zugeordnet, die man z.B. als die zur Ausführung der Operation in einem elektronischen Rechner benötigte Zeit auffassen kann. Wir beschränken uns dabei im Unterschied zu Knuth [9] und Collins [6] auf Operationszeiten, die nur von den Operationen selbst, nicht aber von deren Argumenten abhängen. Strassen hat in seiner Arbeit "Berechnung und Programm I" ([18]) diese Methoden formalisiert und die Rechenzeit einer Berechnung β als die Summe der Operationszeiten der in β auszuführenden Operationen eingeführt. Die Strassen´schen Berechnungen entsprechen Programmen ohne Verzweigungen und ohne Schleifen. In der vorliegenden Arbeit wird der Strassen´sche Berechnungsbegriff zu Berechnungen mit gewissen Verzweigungen erweitert und es wird die Berechnungskomplexität dieser Berechnungen mit Verzweigungen untersucht. Es zeigt sich, daß zum Beispiel viele bedingte Anweisungen eines ALGOL-Programmes durch Berechnungen mit Verzweigungen dargestellt werden können (vergleiche Kapitel 2) , jedoch scheinen Programmschleifen auch durch Berechnungen mit Verzweigungen nicht erfaßbar zu sein.

Die aus der Theorie der partiellen Algebren benötigten Hilfsmittel sowie der daraus abgeleitete Berechnungsbegriff ohne Verzweigungen werden im 1.Kapitel zusammengestellt, wobei wir allgemeiner als Strassen den heterogenen

Fall betrachten. Heterogene Palgebren, das sind partielle Algebren mit beliebig vielen Trägermengen, werden etwa bei Birkhoff/Lipson [2] dargestellt . Wir werden alle Untersuchungen für den heterogenen Fall durchführen und die von Steinhoff [17] dafür übertragenen Strassen'schen Begriffe verwenden. Sei $\triangle$ ein Typ und M eine endliche Menge von Worten der Wortalgebra $W(\triangle)$. Gilt für alle $\omega w_1..w_s \in M$: $\{w_1,..,w_s\} \subset M$,so heißt M eine $\triangle$-Menge oder Berechnung (ohne Verzweigungen). Es sei hier ein Beispiel für eine Berechnung angegeben, aus dem die gute Konzeption dieser Definition deutlich wird : $M:= \{W,X,Y,Z,+WX,-YZ,/+WX-YZ\}$. Bildet man M durch eine im 1.Kapitel einzuführende Abbildung f_{α} in eine Palgebra $\mathfrak{A}$ ab, so berechnet M die Ergebnisse von $w + x$, $y - z$ und $\frac{w + x}{y - z}$. Dieser Berechnungsbegriff erscheint für die Zwecke dieser Arbeit am geeignetsten , in der Literatur treten verschiedene Begriffe auf, zum Beispiel Rechenschema, Schema und Algorithmus.
Für eine Berechnung werden die Rechenzeiten L und T angegeben. Die Länge L gibt die Rechenzeit bei serieller Ausführung, das heißt bei Ausführung auf nur einem Prozessor, an. Die Tiefe T einer Berechnung entspricht der Rechenzeit bei paralleler Ausführung auf beliebig vielen Prozessoren. Die Länge L(M) einer Berechnung M ergibt sich dann einfach als die Summe der Operationszeiten der in M auftretenden Operationen : $L(M) = \sum_{\omega w \in M} t(\omega)$.

Im 2.Kapitel werden Palgebren mit Verzweigungen eingeführt, das sind Palgebren, in denen neben den üblichen algebraischen Verknüpfungen sogenannte Verzweigungsoperationen erklärt sind. Ist α_{σ} eine Verzweigungsoperation

und $\langle a_1,..,a_s\rangle \in \mathrm{Def}\ \alpha_\sigma$, so wählt α_σ ein Element aus $\{a_1,..,a_{s-1}\}$ aus, und zwar gemäß dem Wert a_s . So kann bei dreistelligen Verzweigungsoperationen (s=3) $a_3 \in \{\mathrm{WAHR}, \mathrm{FALSCH}\}$ sein und

$$\alpha_\sigma(a_1,a_2,a_3) := \begin{cases} a_1 & \text{falls } a_3 = \mathrm{WAHR} \\ a_2 & \text{falls } a_3 = \mathrm{FALSCH} \end{cases}$$

Eine Anwendung für diese Verzweigungsoperation ist $\alpha_{max}(b,a,w)$, wobei der Wahrheitswert w so bestimmt wird, daß w = WAHR , falls a < b und w = FALSCH sonst , zum Beispiel $w = \alpha_<(a,b)$. Das Ergebnis von $\alpha_{max}(b,a,w)$ ist dann max(a,b) . Die Operation $\alpha_{max}\ (b,a,\alpha_<(a,b))$ kann man auffassen als Darstellung der bedingten ALGOL-Anweisung

<u>if</u> a < b <u>then</u> max := b <u>else</u> max := a ;

in einem Programm, die man auch schreiben kann als

max := <u>if</u> a < b <u>then</u> b <u>else</u> a ;

Verzweigungsoperationen zeichnen sich gegenüber den anderen algebraischen Verknüpfungen weiter dadurch aus, daß "Vervollständigungselemente" ∞^i im Definitionsbereich liegen können ; in die Richtung eines solchen ∞^i darf dann allerdings nicht verzweigt werden. Dies tritt zum Beispiel auf bei der Abfrage, ob ein Nenner verschwindet. Ist dies der Fall, so ist der Quotient nicht erklärt und es wird in einen Fehlerausgang verzweigt.

Für endliche Wortmengen mit Verzweigungen werden eine maximale und eine minimale Rechenzeit L* bzw. L^*_{min} bei serieller sowie eine minimale Rechenzeit T* bei paralleler Verarbeitung festgelegt. Die maximale Rechenzeit L* ist dabei zu interpretieren als die Rechenzeit derjenigen Berechnung, die, bestimmt durch ihre Verzweigungen, im ungünstigsten Fall auszuführen ist, entsprechend ist die minimale Zeit L^*_{min}

zu erklären. Eine maximale Rechenzeit bei paralleler Verarbeitung ist die Strassen´sche Tiefe T .
Es wird durch die Einführung der sogenannten Expansionen von Palgebren ermöglicht, im Rahmen unseres theoretischen Modells gewisse bereits berechnete Elemente einer Palgebra zu speichern und auf sie ohne Kosten zuzugreifen. Diese Expansionen werden am Ende des 2.Kapitels erläutert.

Die Rechenzeiten L^*, L^*_{min} und T^* werden im 3.Kapitel charakterisiert, wobei die Aussagen und Abschätzungen in diesem Kapitel nur für die Rechenzeiten in Wortalgebren und in Expansionen von Wortalgebren gelten.
Ist W_{Δ^*} eine Wortalgebra und ist B eine endliche Menge von Worten aus W_{Δ^*}, so wurden im 2.Kapitel die Rechenzeiten $L^*(.\text{mod } B), L^*_{min}(.\text{mod } B)$ und $T^*(.\text{mod } B)$ rekursiv erklärt. Diese Art der Definition war im Gegensatz zu den Strassen´schen Längendefinitionen notwendig wegen der Besonderheit der "Vorgängermengen" von Worten, die Verzweigungssymbole enthalten . Ist $W_{\Delta^*}(B)$ die "kanonische B-Expansion" von W_{Δ^*}, das heißt die neue Algebra mit der "gespeicherten" Menge B, so stimmen die Rechenzeiten in $W_{\Delta^*}(B)$ überein mit den Zeiten $L^*_{(min)}(.\text{mod } B)$ und $T^*(.\text{mod } B)$ in W_{Δ^*}(Sätze 3.7,3.8).

Die Transitivitätssätze 3.4 und 3.10 sagen aus, daß es keine Verringerung der Rechengeschwindigkeit zur Folge hat, wenn man erst eine Teilmenge der Ergebnisse berechnet und dann in der entsprechenden Expansion mit einer neuen Berechnung die restlichen Ergebnisse berechnet.
Die Sätze 3.9,3.11 und 3.12 ermöglichen Abschätzungen der Rechenzeiten nach unten. Verwendung finden diese Abschätzungen bei den Beweisen der Simulationssätze 3.17 und 3.18.

Es wird dabei gezeigt, daß man bei der Simulation einer Berechnung auf einer anderen Rechenanlage, hier durch eine Berechnung in einer anderen Wortalgebra charakterisiert, eine höchstens um einen konstanten Faktor größere Rechenzeit erzielt, wobei dieser Faktor durch das Kostenverhältnis der auszuführenden Operationen bestimmt wird.

Für eine endliche Teilmenge einer Palgebra ohne Verzweigungen ist die Länge erklärt als kleinste Länge einer Berechnung, die diese Teilmenge berechnet. Überträgt man dieses Konzept auf Palgebren mit Verzweigungen, so wird man bei nur einer Palgebra immer auf Verzweigungen verzichten können, indem man die Elemente, in die verzweigt wird, einfach direkt berechnet (siehe Beispiel 4.1) . Sinnvoll wird eine Berechnung mit Verzweigungen erst dann, wenn man mit dieser Berechnung in verschiedenen Palgebren Teilmengen berechnet, wobei man für jede Palgebra $\mathcal{A}$ in von $\mathcal{A}$ abhängige Richtungen verzweigt. Ein Beispiel für eine solche Berechnung ist die Auswertung eines Polynoms für verschiedene Argumente. Jede Palgebra kann man als einen Input auffassen, die Richtungen der Verzweigungen sind dann von diesem Input abhängig. Entsprechend werden im 4.Kapitel Systeme $(\mathcal{A}_j)_{j\in J}$ von Palgebren mit Verzweigungen eingeführt und es wird die Berechenbarkeit von Mengensystemen $(B_j)_{j\in J}$ erklärt. Damit können die Rechenzeiten von Mengensystemen $(B_j)_{j\in J}$ definiert werden und es zeigt sich, daß man bei optimalen Berechnungen im allgemeinen nicht auf Verzweigungen verzichten kann. Die Länge $L^*((B_j))= m$ eines Mengensystems ist so zu interpretieren, daß die Rechenzeit der optimalen Berechnung, die für einen

beliebigen Input α_j die Menge B_j berechnet, für jeden Input höchstens m beträgt.
Allgemeine Abschätzungen der Rechenzeiten in Systemen von Palgebren zu gewinnen, erweist sich als sehr schwierig. So gelten bei einer direkten Übertragung der Rechenzeiten in Expansionen von Palgebren nicht mehr die Transitivitätssätze. Das liegt daran, daß für zwei Mengen eines Mengensystems $(B_j)_{j\in J}$,die von der gleichen Berechnung berechnet werden,unter Umständen verschiedene Zwischenergebnisse gespeichert werden müssen. Die Transitivitätssätze aus dem 3.Kapitel kann man für Systeme von Palgebren nur verallgemeinern, wenn man an die Zwischenberechnungen von Mengensystemen die Forderung der Optimalität stellt.

Rechenzeiten von Berechnungen mit und ohne Verzweigungen, die die gleichen Mengen berechnen, werden im 5.Kapitel verglichen. Für ein durch eine Berechnung mit Verzweigungen berechenbares Mengensystem wird nicht nur die Rechenzeit ohne Verwendung von Verzweigungen nach oben abgeschätzt, sondern die entsprechende Berechnung wird auch konstruktiv angegeben. Dabei müssen beim Auftreten eines Wortes $\sigma w_1..w_s$, das mit Verzweigungssymbol σ beginnt, alle Wortkombinationen gebildet werden, die entstehen, wenn $w_1,..,w_{s-1}$ für $\sigma w_1..w_s$ eingesetzt werden. Die Abschätzungen für die Länge der entstehenden Berechnungen ohne Verzweigungen sind daher sehr grob und haben nur theoretischen Charakter.

Im 6.Kapitel werden die Vorbereitungen getroffen für den Beweis des Hauptsatzes über Berechnungen, der besagt, daß unter gewissen Voraussetzungen für eine Berechnung

mit Verzweigungen immer eine Berechnung ohne Verzweigungen gefunden werden kann, die für fast alle Inputs die gleiche Menge berechnet. "Fast alle" gilt hier im Sinne einer irreduziblen Topologie $\mathcal{T}^*$ auf einem System $\mathfrak{B}$ von Δ^*-Palgebren. Diese Topologie wird über "Wortfunktionen" $w_{\mathfrak{B}}$ auf $\mathfrak{B}$ eingeführt: zu jedem Wort w der Wortalgebra gehört eine partielle Funktion $w_{\mathfrak{B}}$ auf $\mathfrak{B}$. Die Definitionsbereiche der Wortfunktionen für Worte ohne Verzweigungen und die Mengen $\{w_{\mathfrak{B}} \neq w'_{\mathfrak{B}}\} \subset \mathfrak{B}$, auf denen zwei Wortfunktionen $w_{\mathfrak{B}}$, $w'_{\mathfrak{B}}$ definiert sind und nicht übereinstimmen, bilden die Subbasis einer Topologie $\mathcal{T}$. Diese Topologie wird verfeinert zu $\mathcal{T}^*$, indem man die Mengen $\{(\sigma w_1..w_s)_{\mathfrak{B}} \neq (w_i)_{\mathfrak{B}}\}$, $i=1,..,s-1$, für mit Selektor σ beginnende Worte $\sigma w_1..w_s$ zur Subbasis hinzunimmt.

Für eine Menge $\mathfrak{B}$ von heterogenen Palgebren ohne Verzweigungen hätte man die Topologie $\mathcal{T}$ auch über die Garbe $\mathcal{O}_{\mathfrak{B}}$ (Strassen [19]) und über die rationalen Funktionen $R(\mathfrak{B})$ auf $\mathfrak{B}$ einführen können. Eine rationale Funktion v auf $\mathfrak{B}$ kann man auffassen als verallgemeinerte Wortfunktion mit maximalem Definitionsbereich ; zum Beispiel entspricht der Wortfunktion $(\frac{a}{x} + \frac{x}{b})_{\mathfrak{B}}$ auf dem System der $\{x\}$-Expansionen von $\mathbb{R}$ die rationale Funktion $(\frac{a}{b})_{\mathfrak{B}}$. Für eine Menge von Palgebren mit Verzweigungen treten bei der Bildung der Garbe $\mathcal{O}_{\mathfrak{B}}$ jedoch Schwierigkeiten auf :
Die geforderte Stetigkeit der algebraischen Verknüpfungen kann man bei Verzweigungsoperationen im allgemeinen nicht voraussetzen ; ferner bereiten die Vervollständigungselemente ∞^i im Definitionsbereich von Verzweigungsoperationen Schwierigkeiten .

Ist die Topologie $\mathcal{T}^*$ auf einer Menge $\mathcal{B}$ von Palgebren irreduzibel, so heißt $\mathcal{B}$ irreduzible Menge von Palgebren. Es zeigt sich, daß man für eine irreduzible Menge von totalen Palgebren, also von Algebren, keine Verzweigungen benötigt (Satz 6.5) .

Mit den vorbereitenden Aussagen des 6.Kapitels kann dann im 7.Kapitel der Satz hergeleitet werden, daß Berechnungen mit Verzweigungen für eine irreduzible Menge von Palgebren bis auf eine dünne Menge (das heißt fast überall) keine Verringerung der Rechenzeit gegenüber Berechnungen ohne Verzweigungen mit sich bringen. Die Anregung zu dieser Aussage gab der Satz von Strassen ([19], Satz 8.4) , der besagt, daß für fast alle Inputs die Verwendung eines Programms anstelle einer Berechnung (ohne Verzweigungen) keine Verringerung der Rechenzeit zur Folge hat. An die Stelle der Programme treten hier die nicht so umfassenden Berechnungen mit Verzweigungen, dafür entfallen einige der Strassen'schen Voraussetzungen : die Menge Ω der Operationssymbole sowie das zu berechnende Mengensystem $(B_j)_{j\in J}$ können hier beliebig sein. Strassen beweist seinen Satz nur für Mengen von rationalen Funktionen. Dies entspricht dem vorliegenden Satz 7.3, in Satz 7.4 wird die analoge Aussage für beliebige berechenbare Mengensysteme bewiesen. Ferner sind die Beweise zu den Sätzen 7.3 und 7.4 konstruktiv.

Als Anwendung für diese beiden Sätze werden zwei Beispiele angegeben . Das erste behandelt ein mit den reellen Zahlen indiziertes System von Palgebren $(\mathcal{T}_x)_{x\in\mathbb{R}}$, wobei jedes $\mathcal{T}_x$ die $\{x\}$-Expansion von $\mathbb{R}$ ist und man neben

den üblichen arithmetischen Operationen auf R eine Vergleichsoperation und eine Verzweigungsoperation hat. Mit diesen Operationen ist es möglich, vor einer Division zu testen, ob der Nenner verschwindet. Man kann $(\mathfrak{I}_x)_{x\in R}$ mit R identifizieren ; die durch die 4 Grundrechenoperationen erzeugte Topologie $\tilde{\ }$ auf $(\mathfrak{I}_x)_{x\in R}$ entspricht dann der reellen Zariskitopologie $\tilde{\mathfrak{Z}}$, die irreduzibel ist. Es wird gezeigt, daß auch die Topologie $\tilde{\ }$ irreduzibel ist und somit die Sätze 7.3 und 7.4 angewendet werden können. Für weitere Operationen auf R wird diskutiert, ob sie $\tilde{\ }$ irreduzibel lassen.

Im 2.Beispiel wird eine Wortalgebra angegeben, in der es eine Berechnung gibt, die den größten gemeinsamen Teiler ggT zweier natürlicher Zahlen $n_1 = n_2$ berechnet. Ein Input ist dann die (n_1,n_2)-Expansion von $N' = N_{(n_1,n_2)}$; alle diese Expansionen mit $n_1 \wedge n_2 > 0$ werden als System $\mathfrak{E}$ partieller Algebren zusammengefaßt. Bereits die Topologie $\tilde{\ }$ auf $\mathfrak{E}$ stellt sich als nicht irreduzibel heraus, daher ist auch $\tilde{\tilde{\ }}$ als Verfeinerung von $\tilde{\ }$ nicht irreduzibel. Dennoch gilt für berechenbare Mengensysteme $(B_{(m,n)})$ mit $B_{(m,n)} = \{ggT(m,n)\}$ oder $B_{(m,n)} = \emptyset$ der Hauptsatz für Berechnungen mit Verzweigungen. Das Beispiel 7.6 verdeutlicht ferner, daß Berechnungen mit Verzweigungen oft gut in der Lage sind, ein Programm zu simulieren.

Dies gilt mit dem im 4.Kapitel aufgestellten Berechnungsbegriff allerdings nur für Programme, die ein Ergebnis exakt berechnen. Bei der Auswertung von Funktionen interessiert man sich in der Praxis jedoch nur für Ergebnisse, die den tatsächlichen Funktionswert bis auf eine

Genauigkeit $\varepsilon > 0$ wiedergeben. Dafür ist der bisher benutzte Berechnungsbegriff nicht geeignet. Im 8.Kapitel werden deswegen sogenannte ε-Näherungsberechnungen eingeführt, die als formales Modell für die Berechnung von Funktionen geeignet erscheinen. Da mit Verzweigungsoperationen auch Intervallabfragen möglich sind, kann zum Beispiel das folgende Problem durch eine ε-Näherungsberechnung mit Verzweigungen erfaßt werden :die reelle Funktion $f \in C[a,b]$ soll auf $[a,b]$ ausgewertet werden, wobei man in jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ des Gitters $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ in eine Funktion $g_i(x)$ verzweigt mit

$$\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - g_i(x)| < \varepsilon \quad \text{für } 0 \leq i \leq n-1 .$$

Beispiel 8.5 zeigt, daß der Strassen'sche Satz über Berechnungen und Programme (19],Satz 8.4) für Näherungsberechnungen nicht gilt: man kann im mit der Zariskitopologie versehenen System der Σ-Expansionen von $\mathbb{R}$ eine Funktion f so konstruieren, daß zu geeignetem $\varepsilon > 0$ die ε-Näherungsberechnung von f auf $[a,b]$ ein Polynom n-ten Grades verlangt, zu dessen Auswertung man wiederum mindestens $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ Multiplikationen und n Additionen/Subtraktionen benötigt (Knuth 69) . Mit einem Programm zur Auswertung von f kann man $[a,b]$ in Intervalle mit Schrittweite $h=h(\varepsilon)$ aufteilen und in jedem Intervall $f(x)$ durch ein Polynom 2. oder 3.Grades approximieren. Für großes n ist dieses Programm dann sicher schneller als die ε-Berechnung, selbst wenn man im Gegensatz zu Strassen den Zeitaufwand für die Intervallabfragen berücksichtigt. Der Hauptsatz für Berechnungen mit Verzweigungen gilt dagegen auch für Näherungsberechnungen (Satz 8.6) .

Am Schluß der Arbeit werden einige Beispiele für die Näherungsberechnung mit und ohne Verzweigungen von Funktionen angegeben. Dabei wird auch auf den unterschiedlichen Speicherplatzbedarf für die nullstelligen Elemente eingegangen: für die $\mathcal{E}$-Berechnung von exp(x) auf $[0,1]$ ($\varepsilon = 0{,}75 \cdot 10^{-8}$) kann man $[0,1]$ in 200 Intervalle einteilen und für diese Unterteilung einen kubischen Interpolationsspline s(x) angeben mit $\max_{x \in [0,1]} |\exp(x)-s(x)| \leq 0{,}2 \cdot 10^{-8}$.

Die Länge der zugehörigen $\mathcal{E}$-Berechnung mit Verzweigungen ist $L^*((\exp(x))_{x \in [0,1]}) = 5 \cdot t(\pm) + 5 \cdot t(\nearrow)$.

Man benötigt dann aber 800 Speicherplätze für die Koeffizienten der 200 Polynome 3.Grades . Es wird eine $\mathcal{E}$-Berechnung β ohne Verzweigungen angegeben, die nur ein hundertstel dieses Speicherplatzbedarfes hat, für die allerdings $L(\beta) = 4 \cdot t(\pm) + 8 \cdot t(\nearrow)$ gilt.

Wie in diesem Fall wird man oft vor der Alternative stehen, entweder eine Berechnung mit einem geringen Speicherplatzbedarf auszuführen, die vom Standpunkt der Berechnungskomplexität nicht optimal ist, oder die Rechenzeit einer Berechnung möglichst klein zu halten, wobei man einen hohen Speicherplatzbedarf in Kauf nehmen muß. Die angegebenen Beispiele der Berechnung von Standardfunktionen auf der UNIVAC 1108 zeigen, daß Praktiker eher zum ersteren neigen.

1. Berechnungen ohne Verzweigungen in partiellen Algebren

Notation: Sei I eine beliebige Menge, die wir Indexmenge nennen. Jedem $i \in I$ seien Mengen A^i, B^i zugeordnet. Ferner seien $f^i : A^i \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\circ\ B^i$ partielle Abbildungen. Für $w \in I^*$, $w = i_1..i_n$, sei $A^w := A^{i_1} \times A^{i_2} \times .. \times A^{i_n}$ und $f^w := f^{i_1} \times .. \times f^{i_n}$ die Produktabbildung $f^w : A^w \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\circ\ B^w$.
Für Mengen A,B gelte : $\#A$ sei die Anzahl der Elemente von A, falls A beschränkt ist, sonst sei $\#A := \infty$;
$\mathcal{E}(A)$ sei das System der endlichen Teilmengen von A .
Für einen string $w = \omega w_1..w_s$ sei $Im\ w := \{w_1,..,w_s\}$;
für Abbildungen $t : A \longrightarrow B$ sei $Im(t) := t(A)$;
$A \sqcup B$ bezeichne die disjunkte Vereinigung von A und B .

Definition 1.1

Ein geordnetes Viertupel $\Delta = (\Omega, I, q, z)$ heißt Typ , wenn gilt :

(1) Ω ist eine Menge, deren Elemente Operationssymbole genannt werden

(2) I ist eine Indexmenge

(3) $q : \Omega \longrightarrow I^*$ ist eine Abbildung, Quelle genannt

$z : \Omega \longrightarrow I$ ist eine Abbildung, Ziel genannt

$\lambda : I^* \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei eine Abbildung , die für jedes Wort (string) die Anzahl der in ihm enthaltenen Zeichen aus I angibt ; für jedes $\omega \in \Omega$ heißt $s(\omega) := \lambda \circ q(\omega)$ die Stellenzahl von ω .

Definition 1.2

$\triangle = (\Omega, I, q, z)$ sei ein Typ ; A sei eine Abbildung , die jedem $i \in I$ eine Menge A^i zuordnet ; α sei eine Abbildung, die jedem $\omega \in \Omega$ eine $s(\omega)$-stellige partielle Operation $\alpha_\omega : A^{q(\omega)} \longrightarrow A^{z(\omega)}$ zuordnet. Das geordnete Paar $\mathfrak{A} = (\{A^i : i \in I\}, \{\alpha_\omega : \omega \in \Omega\})$ heißt partielle Algebra bzw. Palgebra vom Typ $\triangle$ oder kurz $\triangle$-Palgebra.

Eine Operation α_ω heißt total , wenn $\mathrm{Def}\ \alpha_\omega = A^{q(\omega)}$, wobei unter $\mathrm{Def}\ \alpha_\omega$ der Definitionsbereich von α_ω verstanden ist. Eine nullstellige Operation ist entweder leer oder total. Totale nullstellige Operationen ω wählen konstante Elemente aus $A^{z(\omega)}$ aus. Sind alle α_ω total, dann heißt $\mathfrak{A}$ totale $\triangle$-Palgebra oder $\triangle$-Algebra . Die A^i heißen Trägermengen. Besitzt $\mathfrak{A}$ genau eine Trägermenge, so heißt $\mathfrak{A}$ homogen , anderenfalls heterogen .

Beispiel

Sei R ein Ring ; M sei ein R-Modul . M bildet eine heterogene $\triangle$-Algebra mit $\triangle = (\Omega, I, q, z)$,wobei erklärt ist :

$\Omega = \{\Theta, \oplus, \ominus, +, -, *, 0, 1, \tau\}$

$I = \{1, 2\}$

$q(\oplus) = q(\ominus) = 11$

$q(+) = q(-) = q(*) = 22$

$q(\Theta) = q(0) = q(1) = \varepsilon$

$q(\tau) = 21$

$z(\oplus) = z(\ominus) = z(\Theta) = z(\tau) = 1$

$z(+) = z(-) = z(*) = z(0) = z(1) = 2$

Als Trägermengen seien gewählt : $A^1 := M$, $A^2 := R$.
Dann sind $\alpha_{\oplus}$, $\alpha_{\ominus}$, $\alpha_{\otimes}$ die üblichen Gruppenoperationen, wobei $\alpha_{\otimes}$ das neutrale Element von M nullstellig auswählt; α_+ , α_- , α_* , α_0 , α_1 sind die üblichen Ringoperationen und α_{τ} : $R \times M \longrightarrow M$ ist die Skalarmultiplikation.

Für k-Vektorräume kann Ω auch gleich $k \sqcup \{\ominus,+,-\}$ gewählt werden mit $\alpha_\lambda(x) := \lambda * x$ für $\lambda \in k$. Dieses Beispiel zeigt, daß man sich nicht immer auf endliche Ω beschränken kann.

Definition 1.3

Sei $\triangle = (\Omega, I, q, z)$ ein Typ , $\mathfrak{A} = (\{A^i : i \in I\}, \{\alpha_\omega : \omega \in \Omega\})$ und $\mathfrak{B} = (\{B^i : i \in I\}, \{\beta_\omega : \omega \in \Omega\})$ seien $\triangle$-Palgebren.
$F = \{f^i : i \in I\}$ mit $f^i : A^i \longrightarrow B^i$ für alle $i \in I$ heißt Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$,wenn für alle $\omega \in \Omega$ im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^{q(\omega)} & \xrightarrow{f^{q(\omega)}} & B^{q(\omega)} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_\omega} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_\omega} \\ A^{z(\omega)} & \xrightarrow{f^{z(\omega)}} & B^{z(\omega)} \end{array}$$

der obere Weg eine Erweiterung des unteren ist :

$$\beta_\omega \circ f^{q(\omega)} \supset f^{z(\omega)} \circ \alpha_\omega \ .$$

F heißt strenger Homomorphismus , wenn das Diagramm für alle $\omega \in \Omega$ kommutiert .
Ist F ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, so schreibt man auch $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$.

Definition 1.4

Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ gegeben wie in Definition 1.3. $\mathfrak{B}$ heißt (strenge) Unterpalgebra von $\mathfrak{A}$, wenn für alle $i \in I$ $B^i \subset A^i$ gilt und wenn die Einbettung von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ ein (strenger) Homomorphismus ist.

Bemerkungen

1. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Δ-Algebren, dann ist jeder Homomorphismus $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ streng.
2. Jede Δ-Unteralgebra ist streng.
3. Sei $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ strenger Homomorphismus. Dann ist $\operatorname{Im} F := (\{f^i(A^i) \subset B^i : i \in I\}, \{\beta_\omega | f^{q(\omega)}(A^{q(\omega)}) : \omega \in \Omega\})$ eine strenge Unterpalgebra von $\mathfrak{B}$.
4. Die Menge der strengen Unterpalgebren einer Δ-Palgebra $\mathfrak{A}$ ist durchschnittsabgeschlossen. Es wird erklärt : $\operatorname{Prim} \mathfrak{A} := \bigcap \{\mathfrak{B} : \mathfrak{B}$ ist strenge Unterpalgebra von $\mathfrak{A}\}$

Zum Beweis der Bemerkungen sei auf Birkhoff/Lipson [2] und Steinhoff [17] verwiesen.

Sei $\mathfrak{A} = (\{A^i : i \in I\}, \{\alpha_\omega : \omega \in \Omega\})$ eine Δ-Palgebra. Für jedes $i \in I$ sei ∞^i ein neues Zeichen mit $\infty^i \notin A = \bigcup_{i \in I} A^i$.

∞^i heißt die Vervollständigung von A^i.

$\widetilde{A}^i := A^i \cup \{\infty^i\}$

$$\widetilde{\alpha}_\omega(\widetilde{a}_1, .., \widetilde{a}_{s(\omega)}) := \begin{cases} \alpha_\omega(a_1, .., a_{s(\omega)}) & \text{falls definiert} \\ \infty^{z(\omega)} & \text{sonst} \end{cases}$$

$\widetilde{\mathfrak{A}} := (\{\widetilde{A}^i : i \in I\}, \{\widetilde{\alpha}_\omega : \omega \in \Omega\})$ ist dann eine Δ-Algebra (Steinhoff [17]). Sie heißt Standardtotalisierung von $\mathfrak{A}$.

Die Δ-Wortalgebra

Sei $\Delta = (\Omega, I, q, z)$ ein Typ . Für $i \in I$ sei erklärt :

$\Omega^i := \{ \omega w \in \Omega^+ : \omega \in \Omega$ und $z(\omega) = i \}$

$\alpha_\omega : \Omega^{q(\omega)} \longrightarrow \Omega^{z(\omega)}$ mit

$\alpha_\omega(w_1, .., w_{s(\omega)}) := \omega w_1 .. w_{s(\omega)}$

Dann ist $\Omega^+ = \bigcup_{i \in I} \Omega^i$ mit $\Omega^{i_1} \cap \Omega^{i_2} = \emptyset$ falls

$i_1 \neq i_2$ und $i_1, i_2 \in \mathrm{Im}(z)$.

$\widetilde{W}(\Delta) := (\{\Omega^i : i \in I\}, \{\alpha_\omega : \omega \in \Omega\})$ ist dann eine Δ-Algebra. $W(\Delta) := \mathrm{Prim}\, \widetilde{W}(\Delta)$ heißt Δ-Wortalgebra .Sie hat folgende Eigenschaften (Cohn[5], Steinhoff[17]) :

(a) Eindeutige Entzifferbarkeit :

$\forall w \in \bigcup_{i \in I} W^i \qquad (W(\Delta) = (\{W^i : i \in I\}, \{\gamma_\omega : \omega \in \Omega\}))$

$\exists_1 \ \omega \in \Omega \quad \exists_1 (w_1, .., w_{s(\omega)})$ mit $w = \omega w_1 .. w_{s(\omega)}$.

(b) Für jede Δ-Algebra $\mathfrak{A}$ gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $F_{\mathfrak{A}} : W(\Delta) \longrightarrow \mathfrak{A}$.

Insbesondere gilt

$f^{z(\omega)}(\omega w_1 .. w_{s(\omega)}) = \alpha_\omega(f^{q(\omega)_1}(w_1), .., f^{q(\omega)_{s(\omega)}}(w_{s(\omega)}))$.

Wir benutzen die Abkürzungen W_Δ für $W(\Delta)$ und W für $\bigcup_{i \in I} W^i$. Elemente aus W nennen wir auch Wörter der Wortalgebra.

Unter einer Δ-Algebra $\mathfrak{A}$ sei immer $\mathfrak{A} = (\{A^i : i \in I\}, \{\alpha_\omega : \omega \in \Omega\})$ verstanden mit $A = \bigcup_{i \in I} A^i$.

In der Literatur treten eine Reihe von verschiedenen Definitionen für den Begriff der Berechnung auf, zum Teil unter

dem Namen Algorithmus und Rechenschema. Wir verwenden hier das sehr allgemeine Konzept der Δ-Mengen :

Definition 1.5

Sei $\Delta=(\Omega,I,q,z)$ ein Typ , $W(\Delta)$ die Δ-Wortalgebra.Eine Δ-Menge M ist eine endliche Teilmenge von W ,für die gilt : aus $\omega w \in M$ folgt Im $w \subset M$.
Ist $\mathfrak{A}$ eine Δ-Palgebra, so sagt man : M berechnet die Teilmengen von $F_{\tilde{\mathfrak{A}}}(M) \cap A$.

$F_{\tilde{\mathfrak{A}}}$ ist dabei der eindeutig bestimmte Homomorphismus von $W(\Delta)$ nach $\tilde{\mathfrak{A}}$. Die Schreibweise $F_{\tilde{\mathfrak{A}}}(M)$ bedeute : Ist $F_{\tilde{\mathfrak{A}}} = \{f^i_{\tilde{\mathfrak{A}}} : i \in I\}$ und M zerlegt in $M = \bigcup_{i \in I} M^i$, so sei $F_{\tilde{\mathfrak{A}}}(M) := \bigcup_{i \in I} f^i_{\tilde{\mathfrak{A}}}(M^i)$.

Definition 1.6

Eine Abbildung $t : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ heißt Operationszeit , wenn Im(t) mit der von $[0,\infty]$ induzierten Ordnung wohlgeordnet ist .

Wir wollen immer voraussetzen : $t(\omega) = 0$ für nullstellige $\omega \in \Omega$, das heißt die Bereitstellung konstanter Elemente soll keine Rechenzeit in Anspruch nehmen.

Definition 1.7

Für $\triangle$-Mengen M werden die Länge L und die Tiefe T erklärt zu :

$$L(M) := \sum_{\omega w \in M} t(\omega) \quad ,$$

$$T(M) := \max_{m \in M} \tilde{T}(m) \quad ,$$

wobei $\tilde{T} : W \longrightarrow [0,\infty]$ definiert ist durch

$$\tilde{T}(\omega w_1 .. w_{s(\omega)}) := t(\omega) + \max_{1 \leq i \leq s(\omega)} \tilde{T}(w_i) \quad .$$

Definition 1.8

Ist $\mathfrak{A}$ eine $\triangle$-Palgebra und $F \in \mathcal{E}(A)$, so sei

$L(F) := \min \{ L(M) : M$ ist eine $\triangle$-Menge und berechnet $F \}$

$T(F) := \min \{ T(M) : M$ ist eine $\triangle$-Menge und berechnet $F \}$

Man kann dabei immer annehmen, daß diese Minima existieren und angenommen werden, denn nach Strassen [18] gilt :

Lemma 1.9

Ist $X \subset [0,\infty]$ wohlgeordnet , so ist auch die Menge $\bigcup_{n \geq 1} \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i : (x_1,..,x_n) \in X^n \right\}$ wohlgeordnet .

Die Länge einer $\triangle$-Menge kann aufgefaßt werden als die Rechenzeit bei serieller Ausführung, das heißt bei Ausführung auf einem Prozessor, die Tiefe als die Rechenzeit

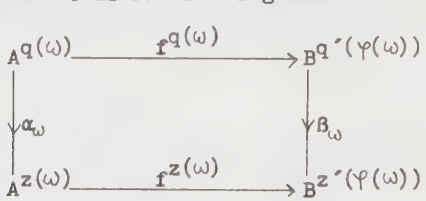
bei paralleler Ausführung. Im letzteren Fall nimmt man an, daß beliebig viele Prozessoren zur Verfügung stehen. Wir nennen $\triangle$-Mengen auch Berechnungen . Berechnungen mit den eingeführten Längen entsprechen Programmen ohne Verzweigungen und Schleifen.

Definition 1.10

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien Palgebren vom Typ $\triangle$ bzw. $\triangle'$,die Indexmenge I sei in beiden Typen gleich; $F = \{f^i : i \in I\}$ heißt φ-Homomorphismus $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$,falls gilt:

(1) φ ist eine stellenerhaltende Abbildung $\varphi: \Omega \longrightarrow \Omega'$ mit
$q(\omega) = q'(\varphi(\omega))$ und $z(\omega) = z'(\varphi(\omega))$

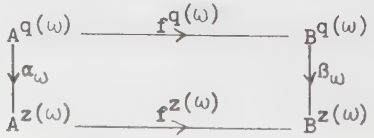
(2) Für alle $\omega \in \Omega$ ist im Diagramm



der obere Weg eine Erweiterung des unteren.

Definition 1.11

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\triangle$-Palgebren wie in Definition 1.3 .
$f^i : A^i \longrightarrow B^i$ seien partielle Abbildungen für $i \in I$.
$F := \{f^i : i \in I\}$ heißt Spezialisierung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$,wenn für jedes $\omega \in \Omega$ im Diagramm



der untere Weg eine Erweiterung des oberen ist.

Eine Spezialisierung heißt <u>streng</u> ,wenn alle diese Diagramme kommutativ sind.

Sei $\mathfrak{A}$ eine Δ-Palgebra, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ die Standardtotalisierung von $\mathfrak{A}$.

Sei $F_{\widetilde{\mathfrak{A}}} = \{f^i_{\widetilde{\mathfrak{A}}} : i \in I\}$ der eindeutig bestimmte Homomorphismus

$F_{\widetilde{\mathfrak{A}}} : W(\Delta) \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}}$.

$$f^i_{\mathfrak{A}} := f^i_{\widetilde{\mathfrak{A}}} \cap (W^i \times A^i)$$

$$f_{\mathfrak{A}} := \{f^i_{\mathfrak{A}} : i \in I\}$$

$f_{\mathfrak{A}}$ ist eine minimale Spezialisierung und die einzige strenge Spezialisierung von $W(\Delta)$ nach $\mathfrak{A}$ (Strassen [19]) .

Von jetzt an sei unter $f_{\mathfrak{A}}$ immer diese Spezialisierung verstanden. $M \in \mathcal{E}(W)$ berechnet $F \in \mathcal{E}(A)$ ist gleichbedeutend mit $f_{\mathfrak{A}}(M) \supset F$; für $f_{\mathfrak{A}}(M)$ gelte hier sinngemäß die Bemerkung nach Definition 1.5 .

2. Partielle Algebren mit Verzweigungen

Definition 2.1

Ein geordnetes Viertupel $\triangle^*=(\Omega,I,q,z)$ heißt Typ mit Verzweigungen , wenn gilt

(i) $\Omega = \Omega_a \sqcup \Omega_\gamma$ ist die disjunkte Vereinigung von Selektionssymbolen Ω_γ und Operationssymbolen Ω_a

(ii) I ist eine Indexmenge

(iii) $z : \Omega \longrightarrow I$ Abbildung ("Ziel") und
$q : \Omega \longrightarrow I^*$ Abbildung ("Quelle") mit: für $\sigma \in \Omega_\gamma$ gilt $s(\sigma) > 2$ und $q(\sigma)=(z(\sigma))^{s(\sigma)-1}.q(\sigma)_{s(\sigma)}$

Diese Definition unterscheidet sich von Definition 1.1 nur in der Forderung an die Abbildung q bei (iii). Dieser Unterschied sei durch die folgende Betrachtung erläutert: Ist σ ein Selektionssymbol, kurz: Selektor, so wird σ später durch α auf eine Verzweigungsoperation α_σ abgebildet. Ist $\langle a_1,..,a_s\rangle \in \text{Def } \alpha_\sigma$, so wählt α_σ gemäß a_s ein Element aus $\{a_1,..,a_{s-1}\}$ aus. Die Einschränkung für die Abbildung q in (iii) wird gemacht, damit die Abbildung $z: \Omega \longrightarrow I$ definiert ist, das heißt , man soll nur zwischen Elementen einer Trägermenge wählen können. Diese Bedingung wird in praktischen Fällen fast immer erfüllt sein.

Notation: Sei $\{A^i : i\in I\}$ ein Trägermengensystem . ∞^i sei für jedes $i\in I$ ein neues Zeichen mit $\infty^i \notin \bigcup_{i\in I} A^i$. Dann sei für alle $i\in I$ erklärt : $\tilde{A}^i := A^i \cup \{\infty^i\}$.

Definition 2.2

Sei $\triangle^*$ ein Typ mit Verzweigungen. $\mathfrak{A}=(\{A^i : i\in I\}, \{\alpha_\omega : \omega\in\Omega\})$ heißt $\triangle^*$-Palgebra mit Verzweigungen , wenn gilt :

(i) Für $\omega\in\Omega_a$ ist $\alpha_\omega : A^{q(\omega)} \longrightarrow A^{z(\omega)}$ eine partielle Operation

(ii) Für $\sigma\in\Omega_\gamma$ ist $\alpha_\sigma : \widetilde{A}^{q(\sigma)_1} \times .. \times \widetilde{A}^{q(\sigma)_{s-1}} \times A^{q(\sigma)_s} \longrightarrow A^{z(\sigma)}$ eine partielle Operation mit
$\alpha_\sigma(\widetilde{a}_1,..,\widetilde{a}_{s-1},a_s) = \widetilde{a}_i \in A^{q(\sigma)_i}$ für ein $i\in\{1,..,s-1\}$, falls $\langle\widetilde{a}_1,..,\widetilde{a}_{s-1},a_s\rangle\in \mathrm{Def}\ \alpha_\sigma$ gilt.

Der Definitionsbereich einer Verzweigungsoperation kann also Vervollständigungselemente ∞^i enthalten, das Element, in das verzweigt wird (das durch α_σ ausgewählt wird) ,darf jedoch kein Vervollständigungselement sein. Das Auftreten von Elementen ∞^i im Definitionsbereich von Verzweigungsoperationen ist für eine große Klasse von Verzweigungen gegeben : oft dienen Verzweigungsoperationen dazu, solange in eine Richtung zu verzweigen, wie diese erklärt ist,und sonst in eine andere Richtung zu verzweigen, zum Beispiel bei der Abfrage, ob ein Zähler verschwindet (siehe Beispiel 2.9).

Ist $\triangle^*$ ein Typ mit Verzweigungen und ist $\mathfrak{A}$ eine $\triangle^*$-Palgebra mit Verzweigungen, so wird erklärt :
Für $\omega\in\Omega_a$ sei $\widetilde{\alpha}_\omega$ wie im 1.Kapitel erklärt ; für $\sigma\in\Omega_\gamma$ sei $\widetilde{\alpha}_\sigma : \widetilde{A}^{q(\sigma)} \longrightarrow \widetilde{A}^{z(\sigma)}$ eine Abbildung,definiert durch

$$\widetilde{\alpha}_\sigma(\widetilde{a}_1,..,\widetilde{a}_{s-1},a_s) := \begin{cases} \alpha_\sigma(\widetilde{a}_1,..,\widetilde{a}_{s-1},a_s) & \text{falls erklärt} \\ z(\sigma) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{\mathfrak{A}} := (\{\tilde{A}^i : i \in I\}, \{\tilde{\alpha}_\omega : \omega \in \Omega\})$ eine $\triangle^*$-Algebra. Sie heißt die Standardtotalisierung von $\mathfrak{A}$.

Da $\triangle^*$ Definition 1.1 erfüllt, kann man wie im 1.Kapitel die Wortalgebra $W(\triangle^*)$ konstruieren. Dann ist $F_{\widetilde{\mathfrak{A}}}$ der eindeutig bestimmte Homomorphismus $F_{\widetilde{\mathfrak{A}}} : W(\triangle^*) \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}}$.

Mit $F_{\widetilde{\mathfrak{A}}} =: \{f^i_{\widetilde{\mathfrak{A}}} : i \in I\}$ seien $f^i_{\mathfrak{A}} := f^i_{\widetilde{\mathfrak{A}}} \cap (W^i \times A^i)$ und $f_{\mathfrak{A}} := \{f^i_{\mathfrak{A}} : i \in I\}$ erklärt. Es werden noch die Abkürzungen $W_{\triangle^*}$ für $W(\triangle^*)$ und W^* für $\bigcup_{i \in I} W^i(\triangle^*)$ benutzt.

Definition 2.3

Es seien $\mathfrak{A} = (\{A^i : i \in I\}, \{\alpha_\omega : \omega \in \Omega\})$ und $\mathfrak{B} = (\{B^i : i \in I\}, \{\beta_\omega : \omega \in \Omega\})$ $\triangle^*$-Palgebren mit Verzweigungen. Ein System von partiellen Abbildungen $F = \{f^i : i \in I\}$ mit $f^i : A^i \longrightarrow B^i$ heißt Spezialisierung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, wenn für alle $\omega \in \Omega$ im Diagramm aus Definition 1.11 der untere Weg eine Erweiterung des oberen ist. Wir wollen auch von einer Spezialisierung $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ sprechen, wenn $\mathfrak{A}$ eine $\triangle^*$-Palgebra im Sinne von Definition 1.2 ist.

Satz 2.4

Die oben angegebene Abbildung $f_{\mathfrak{A}} : W(\triangle^*) \longrightarrow \mathfrak{A}$ ist eine Spezialisierung.

Beweis: Für $\sigma \in \Omega_\gamma$ und $\langle w_1, .., w_s \rangle \in \mathrm{Def}\ \sigma$ sei der obere Weg erklärt. Dann gilt

$$A^{z(\sigma)} \ni \alpha_\sigma(f^{q(\sigma)_1}_{\mathfrak{A}}(w_1), .., f^{q(\sigma)_s}_{\mathfrak{A}}(w_s)) = f^{z(\sigma)}_{\widetilde{\mathfrak{A}}}(\sigma w_1 .. w_s) = f^{z(\sigma)}_{\mathfrak{A}}(\sigma w_1 .. w_s)$$

Damit ist der untere Weg erklärt und es folgt die Behauptung.

qed.

Definition 2.5

Sei $\mathfrak{A}$ eine Δ^*-Algebra mit Verzweigungen und sei $F \in \mathcal{E}(A)$.
Eine Menge $M \in \mathcal{E}(W^*)$ berechnet F , wenn $f_{\mathfrak{A}}(M) \supset F$ gilt.
M heißt dann auch Berechnung mit Verzweigungen.

Beispiel 2.6

Ein Typ $\Delta^* = (\Omega, I, q, z)$ sei definiert durch

$\Omega_a := \{+,-,*,/,0,1,=,<\}$, $\Omega_\gamma := \{\sigma\}$, $I = \{1,2\}$ und

$q(0) = q(1) = \varepsilon$

$q(+) = q(-) = q(*) = q(/) = q(=) = q(<) = 11$

$q(\sigma) = 112$

$z(+) = z(-) = z(*) = z(/) = z(0) = z(1) = z(\sigma) = 1$

$z(=) = z(<) = 2$

Eine Δ^*-Algebra mit Verzweigungen wird dann erklärt durch

$A^1 := \mathbb{R}$, $A^2 := \{WAHR, FALSCH\}$

$\alpha_+, \alpha_-, \alpha_*, \alpha_0, \alpha_1$ Operationen wie im Beispiel zu Definition 1.2 ; $\alpha_/$ sei die (partielle) Division ;

$\alpha_=, \alpha_< : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \{WAHR, FALSCH\}$ werden erklärt durch

$$\alpha_=(a,b) := \begin{cases} WAHR & \text{falls } a=b \\ FALSCH & \text{falls } a \neq b \end{cases}$$

$$\alpha_<(a,b) := \begin{cases} WAHR & \text{falls } a < b \\ FALSCH & \text{sonst} \end{cases}$$

$\alpha_\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{WAHR, FALSCH\} \longrightarrow \mathbb{R}$ wird erklärt durch

$$\alpha_\sigma(a,b,j) := \begin{cases} a & \text{falls } j = WAHR \\ b & \text{falls } j = FALSCH \end{cases}$$

Die Verzweigungsoperation α_σ wählt hier also gemäß dem Wahrheitswert j das Element a bzw. b aus. Als eine Anwendung kann die Operation $\alpha_\sigma(b,a,\alpha_<(a,b))$ dienen, welche $\max(a,b)$ liefert.

Ein ALGOL-Programm zur Bestimmung von max(a,b) kann etwa den Befehl

if a < b then max:=b else max :=a ;

haben. Die Operation $\alpha_{\sigma}(b,a,\alpha_{<}(a,b))$ kann als Simulation dieses Programmschrittes aufgefaßt werden. Es ist zu fragen, welche Arten von Verzweigungen, die bei der Programmierung auftreten , durch Operationen in $\triangle^*$-Palgebren mit Verzweigungen simuliert werden können.

In Programmiersprachen treten im wesentlichen zwei Formen von Verzweigungen auf, die sich zunächst nur durch ihre Schreibweise unterscheiden. Die allgemeinere Schreibweise ist dabei die Form der bedingten Anweisung, in der sich jede Verzweigung darstellen läßt :

Bedingte Anweisung:

if <Bedingung> then <Anweisung1> (else <Anweisung2>) ;

Eine Anweisung kann zum Beispiel ein goto-Befehl sein.
Der Teil in Klammern kann wegfallen.
Spezieller ist der bedingte Ausdruck, bei dem die Verzweigung auf der rechten Seite einer Wertzuweisung eingebaut ist :

Bedingter Ausdruck:

(*) y := if <Bedingung> then <Wert1> else <Wert2> ;

Der bedingte Ausdruck kann in Form einer bedingten Anweisung geschrieben werden :

if <Bedingung> then y :=<Wert1> else y :=<Wert2> ;

Es sei hier dahingestellt, ob sich alle bedingten Anweisungen in der Form (*) darstellen lassen .
Da die in Definition 2.2 erklärten Verzweigungsoperationen

einen von endlich vielen Werten auswählen, kann man die Verzweigungsoperation $\alpha_{if}(\langle Wert1\rangle,\langle wert2\rangle,\langle Bedingung\rangle)$ als Darstellung des Ausdruckes (*) auffassen. Es soll im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht werden, ob weitere Klassen von Verzweigungen durch Operationen in Palgebren mit Verzweigungen dargestellt werden können.Programmschleifen scheinen sich nicht durch Verzweigungsoperationen darstellen zu lassen.

Für Mengen mit Verzweigungen werden eine maximale und eine minimale Rechenzeit bei serieller sowie eine minimale Rechenzeit bei paralleler Verarbeitung festgelegt. Die maximale Rechenzeit ist dabei zu interpretieren als die Rechenzeit derjenigen Berechnung, die, bestimmt durch ihre Verzweigungen, im ungünstigsten Fall auszuführen ist, entsprechend ist die minimale Rechenzeit zu erklären. Eine maximale Rechenzeit bei paralleler Verarbeitung ist die Strassen´sche Tiefe T .

Im folgenden seien Δ^* ein Typ mit Verzweigungen, t eine Operationszeit für Δ^* und W_{Δ^*} die Δ^*-Wortalgebra.

Die Tiefe τ

wir führen für $M \in \mathcal{E}(W^*)$ eine spezielle Tiefe τ ein,nämlich diejenige Tiefe, die die maximale Anzahl der nacheinander auszuführenden Operationen angibt (bei paralleler Ausführung), das heißt die Tiefe unter der Operationszeit $t(\omega)=1$ für $s(\omega)>0$.

$\tau'(\omega) := 0$ für $s(\omega)= 0$; $\tau'(\omega w) := 1 + \max_{w \in Im\ w} \tau'(w')$

Damit wird die Abbildung $\tau: \mathcal{E}(W^*) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$

erklärt zu

$$\tau(M) := \max_{m \in M} \tau'(m)$$

Bildung der Vorgängermengen:

Wir definieren eine partielle Abbildung

$V : \mathbb{N} \times W^* \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\cdot\;\; POT(W^*)$, die wir mit $V_k(m)$ bezeichnen und die k-te Vorgängermenge von $m \in W^*$ nennen.

Dazu sei

$V_k(w) := \emptyset$ für jedes $\omega \in W^*$ mit $s(\omega)=0$ und jedes $k \in \mathbb{N}$;

$V_1(\omega w) :=$ Im w für jedes $\omega \in \Omega_a$ mit $s(\omega) = 1,2$;

$$V_k(m) := \begin{cases} \text{Im } w^m & \text{für } \omega_m \in \Omega_a \text{ , } s(\omega_m) \geq 3 \\ \{w_k^m, w_{s(\omega_m)}^m\} & \text{für } \omega_m \in \Omega_\gamma \text{ , } s(\omega_m) \geq 3 \end{cases}$$

$k=1,2,..,s(\omega_m)-1$; dabei haben wir für m die Darstellung

$m = \omega_m w^m = \omega_m w_1^m w_2^m \ldots w_{s(\omega_m)}^m$ benutzt.

Für jede Wortmenge $M \in \mathcal{E}(W^*)$ definieren wir nun die Menge

$$P(M) := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } M = \emptyset \text{ oder } \tau(M) = 0 \\ \prod\limits_{\substack{m \in M \\ s(\omega_m)>1}} \left[1 : s(\omega_m)-1\right] \times \prod\limits_{\substack{m \in M \\ s(\omega_m)=1}} \left[1 : s(\omega_m)\right] & \text{sonst} \end{cases}$$

Für jedes $\alpha \in P(M)$ sei nun

$$V_\alpha(M) := \bigcup_{s(\omega_m) \geq 1} V_{\alpha_m}(m) \quad ;$$

falls $P(M) = \emptyset$, so sei $V_\alpha(M) = \emptyset$.

Wir führen noch die Abkürzung $\mu(\omega) := s(\omega)-1$ für $\omega \in \Omega$ ein.

Definition 2.7

Seien $A,B \in \mathcal{E}(W^*)$ mit $A \neq \emptyset$; dann wird erklärt :

$$L^*(A \bmod B) := \sum_{\omega w \in A \setminus B} t(\omega) + \max_{\alpha \in P(A \setminus B)} L^*(V_\alpha(A \setminus B) \bmod A \cup B)$$

$$L^*_{min}(A \bmod B) := \sum_{\omega w \in A \setminus B} t(\omega) + \min_{\alpha \in P(A \setminus B)} L^*_{min}(V_\alpha(A \setminus B) \bmod A \cup B)$$

$L^*_{(min)}(A) := L^*_{(min)}(A \bmod \emptyset)$

$L^*_{(min)}(\emptyset \bmod B) := 0$

$T^*(A \bmod B) := \max_{m \in A} \widetilde{T}^*(m \bmod B)$, wobei

$\widetilde{T}^* : W^* \times \mathcal{E}(W^*) \longrightarrow [0,\infty]$ definiert ist durch

$\widetilde{T}^*(m \bmod B) := 0$ falls $m \in B$ gilt ; sonst sei mit $\omega w = \omega w_1 .. w_s$

$$\widetilde{T}^*(\omega w \bmod B) := \begin{cases} t(\omega) + \min\limits_{i=1}^{\mu(\omega)} \left\{ \max(\widetilde{T}^*(w_i \bmod B), \widetilde{T}^*(w_s \bmod B)) \right\} & \text{für } \omega \in \Omega_\gamma \\ t(\omega) + \max\limits_{w' \in \mathrm{Im}\, w} \widetilde{T}^*(w' \bmod B) & \text{für } \omega \in \Omega_a \end{cases}$$

$T^*(A) := T^*(A \bmod \emptyset)$

$T^*(\emptyset \bmod B) := 0$

Definition 2.8

Seien $\mathfrak{A}$ eine Δ^*-Algebra mit Verzweigungen und $B, C \in \mathcal{E}(A)$.

Dann wird erklärt :

$L^*(B \bmod C) := \min \{ L^*(M \bmod N) : M, N \in \mathcal{E}(W^*) \text{ mit } f_\alpha(M) \supset B, f_\alpha(N) = C \}$

$L^*_{min}(B \bmod C) := \min \{ L^*_{min}(M \bmod N) : M, N \in \mathcal{E}(W^*) \text{ mit } f_\alpha(M) \supset B, f_\alpha(N) = C \}$

$T^*(B \bmod C) := \min \{ T^*(M \bmod N) : M, N \in \mathcal{E}(W^*) \text{ mit } f_\alpha(M) \supset B, f_\alpha(N) = C \}$

$L^*_{(min)}(B) := L^*_{(min)}(B \bmod \emptyset)$, $T^*(B) := T^*(B \bmod \emptyset)$

Soll die Algebra, in der die Rechenzeit genommen wird, gekennzeichnet werden, so schreiben wir etwa $L^*(.\mathrm{mod}.\,|\, W(\Delta^*))$ oder auch $L^*_{min}(B \,|\, \mathfrak{A})$.

Beispiel 2.9

Sei die Menge der Operationszeichen $\Omega' := \Omega \sqcup \{X, Y, C\}$.

Ω sei dabei wie in Beispiel 2.6 gegeben.

q' und z' seien erklärt durch $q'|\Omega = q$, $z'|\Omega = z$ und

$q'(X) = q'(Y) = q'(C) = \varepsilon$,

$z'(X) = z'(Y) = z'(C) = 1$.

Dann ist $\Delta^* := (\Omega', I, q', z')$ ein Typ mit Verzweigungen ;

$W(\Delta^*)$ sei die Δ^*-Wortalgebra , ferner sei eine Operationszeit t erklärt durch :

$t(\omega) = 0$ für ω mit $s(\omega) = 0$

$t(<) = t(=) = t(\text{if}) = 1$ (σ wird hier zur Verdeutlichung der Abfrage mit if bezeichnet)

$t(+) = t(-) = t(*) = t(/) = 2$

Mit Definition 2.7 erhält man :

$L^*(\{\text{ifC/XY=YO}\}) = t(\text{if}) + t(=) + t(/) = 4$

$L^*_{min}(\{\text{ifC/XY=YO}\}) = t(\text{if}) + t(=) = 2$

$L^*(\{\text{ifC/XY=YO , /XY}\}) = 4$

$L^*_{min}(\{\text{ifC/XY=YO , /XY}\}) = 4$

Hier tritt ein wesentlicher Unterschied zur Länge L in Palgebren ohne Verzweigungen auf :

Bei Mengen mit Verzweigungen kann man nur auf Wörter der berechneten Menge $A \in \mathcal{F}(W^*)$ (hier: $\{\text{ifC/XY=YO}\}$) zugreifen und nicht, wie bei Mengen ohne Verzweigungen, auf deren Vorgänger. So wird bei der Bestimmung von $L^*_{min}(\{\text{ifC/XY=YO}\})$ die Operation /XY gar nicht berücksichtigt ; will man das Ergebnis von /XY haben, so muß man /XY zusätzlich berechnen , wie das mit der obigen Menge $\{\text{ifC/XY=YO , /XY}\}$ geschehen ist.

Expansionen von $\triangle^*$-Palgebren

Seien $\triangle^*=(\Omega,I,q,z)$ ein Typ mit Verzweigungen, Y eine Menge und $\tilde{z} : Y \longrightarrow I$ eine Abbildung, dann wird $\triangle^* \dot{\sqcup} Y := (\Omega \sqcup Y, I, q', z')$ ein Typ durch $q' | \Omega = q$, $q'(y) = \varepsilon$ für $y \in Y$ und $z' | \Omega = z$, $z' | Y = \tilde{z}$. Der Typ $\triangle^* \dot{\sqcup} Y$ ist im heterogenen Fall von $\tilde{z}$ abhängig . Ist $\mathfrak{A}$ eine $\triangle^*$-Palgebra und $\mathfrak{B}$ eine $\triangle^* \dot{\sqcup} Y$-Palgebra mit gleichem Trägermengensystem wie $\mathfrak{A}$, für die $\beta | \Omega = \alpha$ gilt, so sagen wir auch : $\mathfrak{B}$ ist eine $(Y,\tilde{z})$-Expansion von $\mathfrak{A}$ oder eine $\triangle^*$-Palgebra über Y bzgl. $\tilde{z}$. $\mathfrak{B}$ wird dann mit $\mathfrak{A}(Y)$ bezeichnet. Ist speziell $Y \subset A = \bigcup_{i \in I} A^i$, dann heißt $\mathfrak{A}(Y) := (\{A^i : i \in I\}, \{\alpha_\omega : \omega \in \Omega \sqcup Y\})$ mit $\alpha_y(\emptyset) := y$ die kanonische Y-Expansion von $\mathfrak{A}$. Der Typ $\triangle^* \dot{\sqcup} Y$ ist dabei eindeutig definiert durch

$$z'(\omega) := \begin{cases} z(\omega) & \text{für } \omega \in \Omega \\ i & \text{für } \omega = y \in A^i \end{cases}$$

Ist $t : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ eine Operationszeit für $W(\triangle^*)$, so wird $\tilde{t} : \Omega \sqcup Y \longrightarrow [0,\infty]$ eine Operationszeit für $W(\triangle^* \dot{\sqcup} Y)$ durch $\tilde{t} | \Omega = t$ und $t(y) := 0$ für $y \in Y$.

Die Länge in der kanonischen Y-Expansion $\mathfrak{A}(Y)$ ist damit zu interpretieren als die Rechenzeit, die man erhält unter der Annahme , daß die Elemente von Y schon berechnet und gespeichert sind und auf sie ohne Kosten zugegriffen werden kann .

3. Die Rechenzeiten L^* , L^*_{min} und T^*

In diesem Kapitel werden die Rechenzeiten L^*, L^*_{min} und T^* für Wortalgebren und für Expansionen von Wortalgebren charakterisiert. Es sei immer $\triangle^*$ ein Typ mit Verzweigungen und $W(\triangle^*)$ die $\triangle^*$-Wortalgebra.
Für eine $\triangle$-Menge M gilt $L(M) = \sum_{\omega w \in M} t(\omega)$ in der $\triangle$-Wortalgebra (siehe Definition 1.7). Für beliebige Mengen $N \in \mathcal{E}(W)$ ist L(N) gleich der Länge der kleinsten $\triangle$-Menge, die N umfaßt. Beispiel 2.9 hat gezeigt, daß man dieses Konzept nicht auf Mengen mit Verzweigungen übertragen kann, da man hier nicht auf die Vorgänger von bereits berechneten Wörtern zugreifen kann. Es werden daher die $\triangle^*_N$-Mengen eingeführt :

Definition 3.1

Seien $M,N \in \mathcal{E}(W^*)$. M heißt eine $\triangle^*_N$-Menge , wenn aus $\omega w \in M \setminus N$ folgt : $V_k(\omega w) \subset M$ für ein $k \in \{1,..,\mu(\omega)\}$, falls $s(\omega) \geq 2$, $V_1(\omega w) \subset M$ falls $s(\omega)=1$. Ist N leer, so heißt M eine $\triangle^*$-Menge .

Seien $M,N \in \mathcal{E}(W^*)$. Wir konstruieren eine $\triangle^*_N$-Menge, die M umfaßt. Wir wählen

$\alpha_1 \in P(M \setminus N)$ $\qquad M_{\alpha_1} := M \cup V_{\alpha_1}(M \setminus N)$

$\alpha_2 \in P(M_{\alpha_1} \setminus (M \cup N))$ $\qquad M_{\alpha_1 \alpha_2} := M_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2}(M_{\alpha_1} \setminus (N \cup M))$

$\alpha_3 \in P(M_{\alpha_1\alpha_2} \setminus (M_{\alpha_1} \cup N))$ $\qquad M_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} := M_{\alpha_1\alpha_2} \cup V_{\alpha_3}(M_{\alpha_1\alpha_2} \setminus (M_{\alpha_1} \cup N))$

$\vdots$

$\alpha_n \in P(M_{\alpha_1 .. \alpha_{n-1}} \setminus (M_{\alpha_1 .. \alpha_{n-2}} \cup N))$ $\qquad M_{\alpha_1 .. \alpha_n} := M_{\alpha_1 .. \alpha_{n-1}} \cup V_{\alpha_n}(M_{\alpha_1 .. \alpha_{n-1}} \setminus (M_{\alpha_1 .. \alpha_{n-2}} \cup N))$

Eine so konstruierte Menge $M_{\alpha_1 .. \alpha_n}$ heißt $\underline{\triangle_N^*\text{-Hülle}}$ von M oder $\underline{\triangle^*\text{-Hülle}}$ von M, falls N leer ist. Eine $\triangle^*$-Hülle von M enthält M und eine mögliche Kombination von Vorgängermengen. Bei der Bildung einer $\triangle_N^*$-Hülle werden beim Auftreten eines $w \in N$ für w keine Vorgänger hinzugefügt.
Jede Folge $\alpha_1, .., \alpha_n$ bricht nach endlich vielen Schritten ab, da $\tau(M) < \infty$ gilt. Da ferner jedes $P(M_{\alpha_1 .. \alpha_i} \setminus (M_{\alpha_1 .. \alpha_{i-1}} \cup N))$ endlich ist, erhält man mit obiger Konstruktion und mit den Definitionen von L^* und L^*_{min} einige leichte Aussagen über $\triangle_N^*$-Hüllen :

Korollar 3.2

Für endliche Wortmengen M und N gilt :

(i) M besitzt endlich viele $\triangle_N^*$-Hüllen

(ii) Treten in M keine Selektoren auf, so besitzt M nur eine $\triangle_N^*$-Hülle .

(iii) $L^*(M \bmod N) = \max_{\substack{M' \text{ ist } \triangle_N^*\text{-} \\ \text{Hülle v.M}}} \left(\sum_{\omega w \in M' \setminus N} t(\omega) \right)$

$L^*_{min}(M \bmod N) = \min_{\substack{M' \text{ ist } \triangle_N^*\text{-} \\ \text{Hülle v.M}}} \left(\sum_{\omega w \in M' \setminus N} t(\omega) \right)$

Satz 3.3

$L^*(M \bmod N)$ und $L^*_{min}(M \bmod N)$ sind isoton in M und anti-ton in N .

Beweis: Seien M′ und N′ Wortmengen mit $M' \supset M$ und $N' \supset N$. Zur Abkürzung benutzen wir für $\triangle_N^*$-Hüllen $M_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ von M und $M'_{\beta_1 \ldots \beta_m}$ von M′ die Notation :

$Q_1 := M \setminus N$, $Q_1' := M' \setminus N$,

$Q_2 := M_{\alpha_1} \setminus (M \cup N)$, $Q_2' := M'_{\beta_1} \setminus (M' \cup N)$ und für $i \geq 3$:

$Q_i := M_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}} \setminus (M_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-2}} \cup N)$ sowie $Q_i' := M'_{\beta_1 \ldots \beta_{i-1}} \setminus (M'_{\beta_1 \ldots \beta_{i-2}} \cup N)$.

Behauptung (I): Zu jeder $\triangle_N^*$-Hülle $M_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ von M gibt es eine $\triangle_N^*$-Hülle $M'_{\beta_1 \ldots \beta_m}$ von M′ mit $M_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \subset M'_{\beta_1 \ldots \beta_m}$.

Beweis: Die Folge $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ bestimme die $\triangle_N^*$-Hülle $M_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ von M. Wir wählen $\beta_1 \in P(Q_1')$, $\beta_2 \in P(Q_2')$, ... sukzessive nach der Vorschrift : (mit k=1,2,...)

(*) $\beta_k | P(Q_k' \cap Q_k) := \alpha_k | P(Q_k' \cap Q_k)$

(**) Für $m \in Q_k' \setminus Q_k$ wird $\beta_k | P(m)$ so bestimmt, daß

$$\beta_k | P(m) = \begin{cases} \alpha_i | P(m) & \text{falls } m \in Q_i \text{ für ein } i > k \\ \text{beliebig gewählt} & \text{sonst} \end{cases}$$

(***) Ist $P(Q_k')$ leer ,so bricht man mit $M'_{\beta_1 \ldots \beta_{k-1}}$ ab.
Ist $P(Q_k)$ leer ,so wird die Hüllenbildung $M'_{\beta_1 \ldots \beta_{k-1} \beta_m}$ beliebig fortgesetzt.

Die Zuordnung unter (**) ist definiert, da m in höchstens einer der Mengen Q_i für i=k+1,k+2,..,n liegen kann.

(1) Es gilt $M_{\alpha_1} \subset M'_{\beta_1}$ wegen $M \subset M'$ und $V_{\alpha_1}(Q_1) \subset V_{\beta_1}(Q'_1)$.

(2) Wir zeigen : $M_{\alpha_1\alpha_2} \subset M'_{\beta_1\beta_2}$ oder $M_{\alpha_1\alpha_2} \subset M'_{\beta_1}$, falls $P(Q'_2) = \emptyset$.
Wegen (1) genügt es zu zeigen : $V_{\alpha_2}(Q_2) \quad M'_{\beta_1\beta_2}$.
Dazu sei $m \in V_{\alpha_2}(Q_2)$.

(a) Ist $m \in V_{\bar{\alpha}_2}(Q_2 \setminus M')$ mit $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 \mid P(Q_2 \setminus M')$, dann ist nach (*) $m \in V_{\bar{\beta}_2}(Q'_2 \cap Q_2)$ mit $\bar{\beta}_2 = \beta_2 \; P(Q'_2 \cap Q_2)$.
Damit liegt m auch in $M'_{\beta_1\beta_2}$. Im Fall (a) kann $P(Q'_2)$ nicht leer sein.

(b) Ist $m \in V_{\bar{\bar{\alpha}}_2}(Q_2 \cap M')$ mit $\bar{\bar{\alpha}}_2 = \alpha_2 \mid P(Q_2 \cap M')$,so liegt m nach (**) bereits in $V_{\beta_1}(Q'_1)$, also $m \in M'_{\beta_1}$ oder $m \in M'_{\beta_1\beta_2}$.

(3) Induktionsschritt: Seien $\beta_1,..,\beta_{i-1}$ mit $i \geq 3$ nach der obigen Vorschrift konstruiert oder die Folge sei mit $\beta_1,..,\beta_k$ $(k \leq i-2)$ abgebrochen und es gelte $M_{\alpha_1..\alpha_{i-1}} \subset M'_{\beta_1..\beta_{i-1}}$ bzw. $M_{\alpha_1..\alpha_{i-1}} \subset M'_{\beta_1..\beta_k}$. Dann zeigen wir wie unter (2) : Für $m \in V_{\alpha_i}(Q_i)$ gilt $m \in M'_{\beta_1..\beta_i}$ oder $m \in M'_{\beta_1..\beta_{k'}}$, $k' \leq i-1$.

(a) Ist $m \in V_{\bar{\alpha}_i}(Q_i \setminus M'_{\beta_1..\beta_{i-1}})$, dann ist $m \in V_{\bar{\beta}_i}(Q'_i \cap Q_i)$ wieder wegen (*).In diesem Fall kann die Folge $\beta_1,..,\beta_i$ noch nicht abgebrochen sein.

(b) Für $m \in V_{\bar{\bar{\alpha}}_i}(Q_i \cap M'_{\beta_1..\beta_{i-1}})$ liegt m wie unter (2) bereits in einer der Mengen $M'_{\beta_1},..,M'_{\beta_1..\beta_{i-1}}$.

Aus (a) und (b) folgt : $M_{\alpha_1..\alpha_i} \subset M'_{\beta_1..\beta_k}$ mit $k \leq i$. Bricht $\alpha_1,..,\alpha_n$ ab und ist $P(Q'_n) \neq \emptyset$, dann können $\beta_{n+1},..,\beta_m$ beliebig gewählt werden.Damit ist Behauptung (I)gezeigt.

Aus Behauptung (I) ergibt sich mit Korollar 3.2(iii) : $L^*(M \bmod N) \leq L^*(M' \bmod N)$ .Für $L^*_{min}(.\text{mod}.)$ zeigt man : Jede $\triangle^*_N$-Hülle von M' umfaßt eine $\triangle^*_N$-Hülle von M.
Für die Antitonie von L*(.mod.) zeigt man :Jede $\triangle^*_N$-Hülle B' von M ist in einer $\triangle^*_N$-Hülle B von M enthalten.

Für die Antitonie von L^*_{min}(.mod.) zeigt man, daß jede $\triangle^*_N$-Hülle von M eine $\triangle^*_N$-Hülle von M umfaßt.

Die Konstruktionen der Hüllen in diesen 3 Fällen verlaufen analog zur Hüllenbildung im Beweis zu Behauptung (I). Mit Korollar 3.2 (iii) ergibt sich dann jeweils die Behauptung des Satzes. qed.

Satz 3.4 (Transitivität)

Für Wortmengen $D,E,F \in \mathcal{E}(W^*)$ gilt

(i) $L^*(F \cup E \text{ mod } D) \leq L^*(F \text{ mod } D \cup E) + L^*(E \text{ mod } D)$

(ii) $L^*_{min}(F \cup E \text{ mod } D) \leq L^*_{min}(F \text{ mod } D \cup E) + L^*_{min}(E \text{ mod } D)$

Beweis: (1) Für eine disjunkte Vereinigung $A \cup B$ gilt : zu jedem $\gamma \in P(A \cup B)$ existieren $\alpha \in P(A)$ und $\beta \in P(B)$ mit $V_\alpha(A) \cup V_\beta(B) = V_\gamma(A \cup B)$. Man nehme für α bzw. β zum Beispiel die Projektionen von γ auf P(A) bzw. P(B).

(2) $L^*(A \cup B \text{ mod.}) \leq L^*(A \text{ mod.}) + L^*(B \text{ mod.})$ folgt mit einer leichten Induktion über $\tau(A \cup B)$.

(3) Für Mengen D,E und F ist $(E \cup F) \setminus D$ die disjunkte Vereinigung von $E \setminus D$ und $F \setminus (E \cup D)$.

Mit (1),(2),(3) und Satz 3.3 folgt

$$L^*(E \cup F \text{ mod } D) = \sum_{\omega w \in (E \cup F) \setminus D} t(\omega) + \max_{\alpha} L^*(V_\alpha((E \cup F) \setminus D) \text{mod } E \cup F \cup D)$$

$$= \sum_{\omega w \in (E \cup F) \setminus D} t(\omega) + \max_{\alpha_1, \alpha_2} L^*(V_{\alpha_1}(E \setminus D) \cup V_{\alpha_2}(F \setminus (E \cup D)) \text{mod } E \cup F \cup D)$$

$$= \sum_{\omega w \in E \setminus D} t(\omega) + \max_{\alpha_1} L^*(V_{\alpha_1}(E \setminus D) \bmod E \cup F \cup D)$$

$$+ \sum_{\omega w \in F \setminus (E \cup D)} t(\omega) + \max_{\alpha_2} L^*(V_{\alpha_2}(F \setminus (E \cup D)) \bmod E \cup F \cup D)$$

$$= \sum_{\omega w \in E \setminus D} t(\omega) + \max_{\alpha_1} L^*(V_{\alpha_1}(E \setminus D) \bmod E \cup D)$$

$$+ \sum_{\omega w \in F \setminus (E \cup D)} t(\omega) + \max_{\alpha_2} L^*(V_{\alpha_2}(F \setminus (E \cup D)) \bmod E \cup F \cup D)$$

$$= L^*(E \bmod D) + L^*(F \bmod E \cup D)$$

Für L^*_{min} folgt die Abschätzung bis auf die 1.Ungleichung durch Ersetzen von max durch min ; die Begründung (1) muß hier lauten : Für eine disjunkte Vereinigung $A \cup B$ existiert zu $\alpha \in P(A)$ und $\beta \in P(B)$ ein $\gamma \in P(A \cup B)$ mit $V_\alpha(A) \cup V_\beta(B) = V_\gamma(A \cup B)$ (man wähle $\gamma := \alpha \times \beta$). Dann ist

$$\min_{\alpha,\beta} L^*_{min}(V_\alpha(A) \cup V_\beta(B)) \geq \min_{\gamma} L^*_{min}(V_\gamma(A \cup B)) \ .$$

ged.

Es soll nun der wichtige Satz hergeleitet werden, der besagt, daß für eine Wortalgebra $W(\triangle^*)$ und für $B \in \mathcal{E}(W^*)$ die Länge $L^*(.\bmod B | W(\triangle^*))$ mit der Länge $L^*(.)$ in der kanonischen B-Expansion $W_{\triangle^*}(B)$ von $W(\triangle^*)$ übereinstimmt. Dazu fassen wir $W^*_{\triangle^*}$ als Teilmenge von $W^*_{\triangle^* \sqcup B}$ auf und erklären Abbildungen $g' : \mathcal{E}(W^*_{\triangle^* \sqcup B}) \longrightarrow \mathcal{E}(W^*_{\triangle^* \sqcup B})$

und $g : \mathcal{E}(W^*) \longrightarrow \mathcal{E}(W^*_{\triangle^* \sqcup B})$,

die auftretende strings aus der Wortmenge B durch die zugehörenden Symbole in $W(\triangle^* \sqcup B)$ ersetzen :

Mit $W^*_{\triangle^* \sqcup B} \supset \widetilde{B} := \{\widetilde{b} : \text{es gibt ein } b \in B, \text{für das } \widetilde{b} \text{ das Symbol ist}\}$

und $\Omega_o := \{\omega \in \Omega : s(\omega) = 0\}$ seien

$$g'(b) := \tilde{b} \quad \text{für } b \in B$$

und $g' \restriction (\Omega_o \cup \tilde{B}) \setminus B := id_{(\Omega_o \cup \tilde{B}) \setminus B}$

und rekursiv

$$g'(\omega w_1 .. w_s) := \omega g' w_1 g' w_2 .. g' w_s \quad \text{falls } \omega w_1 .. w_s \notin B \text{ und } s(\omega) \geq 1 .$$

Die Abbildung $g' : \mathcal{E}(W^*_{\Delta \cup B}) \longrightarrow \mathcal{E}(W^*_{\Delta \cup B})$ werde dann als die vereinigungstreue Fortsetzung definiert.
Die Abbildung $g : \mathcal{E}(W^*) \longrightarrow \mathcal{E}(W^*_{\Delta \cup B})$ wird erklärt durch $g := g' \restriction \mathcal{E}(W^*)$.

Lemma 3.5

Für Mengen $M, N \in \mathcal{E}(W^*_{\Delta \cup B})$ gilt $L^*(M \bmod N) \geq L^*(g'(M) \bmod g'(N))$.

Beweis: Wir zeigen zunächst :

(a) $g'(M) \setminus g'(N) \subset g'(M \setminus N)$

(b) Ist M'' eine $\Delta^*_{g'(N)}$-Hülle von $g'(M)$, so existiert eine Δ^*_N-Hülle M' von M mit $M'' \subset g'(M')$.

Zum Beweis von (a) sei $m \in g'(M) \setminus g'(N)$. Dann hat m ein Urbild bzgl. g' in M, das nicht in N liegt, somit $m \notin g'(M \setminus N)$.

Zum Beweis von (b) sei M'' durch die Folge $\alpha_1, .., \alpha_n$ gegeben ; analog zu den Bezeichnungen in Satz 3.3 seien für $M_{\alpha_1 .. \alpha_n}$ und für eine Δ^*_N-Hülle $M'_{\beta_1 .. \beta_m}$ von M erklärt :

$Q_1 := g'(M) \setminus g'(N)$, $Q'_1 := M \setminus N$

$Q_2 := M_{\alpha_1} \setminus (g'(M) \cup g'(N))$, $Q'_2 := M'_{\beta_1} \setminus (M \cup N)$ und für $i \geq 3$:

$Q_i := M_{\alpha_1 .. \alpha_{i-1}} \setminus (M_{\alpha_1 .. \alpha_{i-2}} \cup g'(N))$, $Q'_i := M'_{\beta_1 .. \beta_{i-1}} \setminus (M'_{\beta_1 .. \beta_{i-2}} \cup N)$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt :

$\alpha_1 \in P(Q_1)$ $\quad M_{\alpha_1} = g'(M) \cup V_{\alpha_1}(Q_1)$

$\vdots$

$\alpha_n \in P(Q_n)$ $\quad M_{\alpha_1 .. \alpha_n} = M_{\alpha_1 .. \alpha_{n-1}} \cup V_{\alpha_n}(Q_n)$

Wir wählen $\beta_1 \in P(Q_1')$, $\beta_2 \in P(Q_2')$, ... sukzessive nach der Vorschrift :

Für $m \in Q_k'$, $k=1,2,..$, sei

$$(*) \qquad \beta_k | P(m) := \begin{cases} \alpha_j | P(g'(m)) & \text{falls } g'(m) \in Q_j \text{ für ein } 1 \le j \le n \\ & \text{und falls } P(g'(m)) \neq \emptyset . \\ \text{beliebig gewählt} & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $P(g'(m)) \neq \emptyset$ ist $m \notin \Omega_o \cup \tilde{B} \cup B$ und mit $m =: \omega_m w_1^m .. w_s^m$ und $g'(m) =: \omega_{g'(m)} g w_1^m .. g w_s^m$ gilt $\left[1 : s(\omega_m)\right] = \left[1 : s(\omega_{g'(m)})\right]$; Da ferner $Q_j \cap Q_k = \emptyset$ für $j \neq k$ ist, ist β_k definiert.

Die Folge der β_k breche bei m ab. Dann ist $M'_{\beta_1 .. \beta_m}$ eine Δ_N^*-Hülle von M nach Definition der Q_i' und nach Wahl der β_i für $i=1,..,m$. Wir zeigen durch Induktion über k, daß $M_{\alpha_1 .. \alpha_k} \subset g'(M'_{\beta_1 .. \beta_m})$ gilt für $k=1,..,n$:

Sei $k=1$ (Der Fall $P(Q_1)=\emptyset$ ist trivial).

Sei $m \in M_{\alpha_1} = g'(M) \cup V_{\alpha_1}(Q_1)$.

Ist $m \in g'(M)$, so folgt die Behauptung wegen $M \subset M'_{\beta_1 .. \beta_m}$.

Ist $m \in V_{\alpha_1}(Q_1)$, so gibt es ein $w = \omega w_1 .. w_s \in Q_1$ mit $V_{\alpha_1 | P(w)}(w) = m$. Nach (a) gilt dann $w \in g'(M \setminus N)$. Wir können also ein Urbild $\bar{w} = \bar{\omega}\, \bar{w}_1 .. \bar{w}_s$ von w aus $M \setminus N = Q_1'$ wählen. Dann gilt $g'(\bar{w}) = w$. Wäre $\bar{w} \in (\Omega_o \cup \tilde{B} \cup B)$, so wäre $P(w)=\emptyset$, was nach der Wahl von w nicht möglich ist. Also ist $s(\bar{\omega}) \ge 1$ und es gilt $\omega w_1 .. w_s = g'(\bar{w}) = \bar{\omega} g \bar{w}_1 .. g \bar{w}_s$.

Mit (*) folgt dann : $m = V_{\alpha_1|P(w)}(w) = g'(V_{\beta_1|P(\bar{w})}(\bar{w}))$, also $m \in g'(M'_{\beta_1..\beta_m})$.

Die Behauptung sei für alle $i \leq k-1$ gezeigt. Wir wählen ein $m \in M_{\alpha_1..\alpha_K} = M_{\alpha_1..\alpha_{k-1}} \cup V_{\alpha_k}(Q_k)$. Wegen der Induktionsvoraussetzung können wir wieder $m \in V_{\alpha_k}(Q_k)$ annehmen.
Nach Induktionsvoraussetzung liegt auch Q_k in $g'(M'_{\beta_1..\beta_m})$. Daher können wir wieder $w = \omega w_1..w_s \in Q_k$ mit $m = V_{\alpha_k|P(w)}(w)$, $\bar{w} = \bar{\omega}\,\bar{w}_1..\bar{w}_s \in M'_{\beta_1..\beta_k}$ mit $s(\bar{\omega}) \geq 1$ und $g'(\bar{\omega}\,\bar{w}_1..\bar{w}_s) = \omega w_1..w_s$ annehmen. Liegt $\bar{w}$ in Q'_k , so wird $\beta_k|P(\bar{w}) = \alpha_k|P(w)$ gesetzt und $m \in g'(M'_{\beta_1..\beta_m})$ folgt wie im Induktionsanfang.
Liegt $\bar{w}$ nicht in Q'_k oder ist die Folge der β_i bereits bei $m < k$ abgebrochen und liegt $\bar{w}$ nicht in Q'_m , so muß es wegen $\bar{w} \in M'_{\beta_1..\beta_m}$ in einem $M'_{\beta_1..\beta_s} \setminus M'_{\beta_1..\beta_{s-1}}$, $s \leq m$, liegen. Wegen $\bar{w} \notin N$ gilt dann $\bar{w} \in Q'_s$. Nach (*) gilt dann $m = g'(V_{\beta_s|P(\bar{w})}(\bar{w}))$ und somit $m \in g'(M'_{\beta_1..\beta_m})$. Insgesamt folgt Behauptung (b).

Mit (a) und (b) und Korollar 3.2 folgt nun

$$L^*(M \bmod N) = \max_{\substack{M' \text{ ist } \Delta^*_N\text{-} \\ \text{Hülle v.} M}} \Big(\sum_{\omega w \in M' \setminus N} t(\omega) \Big)$$

$$\geq \max_{M'} \Big(\sum_{\omega w \in g'(M' \setminus N)} t(\omega) \Big)$$

$$\geq \max_{M'} \Big(\sum_{\omega w \in g'(M') \setminus g'(N)} t(\omega) \Big)$$

$$\geq \max_{\substack{M'' \text{ ist } \Delta^*_{g'(N)}\text{-} \\ \text{Hülle v.} g'(M)}} \Big(\sum_{\omega w \in M'' \setminus g'(N)} t(\omega) \Big)$$

$$= L^*(g'(M) \bmod g'(N))$$

qed.

Lemma 3.6

Für Wortmengen $A,C \in \mathcal{E}(W^*)$ gilt :

$L^*(A \bmod C \mid W_{\Delta^*}(B)) = L^*(g(A) \bmod g(C) \mid W(\Delta^* \dot\cup B))$

Beweis: Es ist nach Definition 2.8 :

$L^*(A \bmod C) = \min\{L^*(M \bmod N) : f_{W_{\Delta^*}(B)}(M) \supset A \text{ und } f_{W_{\Delta^*}(B)}(N) = C\}$

Sei M,N ein Paar, für das $L^*(A \bmod C) = L^*(M \bmod N \mid W(\Delta^* \dot\cup B))$ gilt. Wegen Satz 3.3 kann man $f_{W_{\Delta^*}(B)}(M) = A$ annehmen, da man anderenfalls zu $f^{-1}_{W_{\Delta^*}(B)}(A) \cap M$ übergehen kann.

Für $f_{W_{\Delta^*}(B)}$, das wir abkürzend mit f bezeichnen wollen, gilt :

$f \mid (\Omega_o \setminus \tilde{B}) = id_{(\Omega_o \setminus \tilde{B})}$,

$f(\tilde{b}) = b$ für $\tilde{b} \in \tilde{B}$ und

$f(\omega w_1 .. w_{s(\omega)}) = \omega f w_1 .. f w_{s(\omega)}$ für $s(\omega) \geq 1$;

Für Wortmengen ist diese Abbildung vereinigungstreu fortgesetzt.

Wir zeigen durch Induktion über $\tau(m)$, $m \in W^*_{\Delta \dot\cup B}$:

(*) $f \circ g' = f$

(**) $g \circ f = g'$

Sei $\tau(m) = 0$.

(*) $$f \circ g'(m) = \begin{cases} f(m) & \text{falls } m \notin B \\ f(\tilde{m}) = m = f(m) & \text{falls } m \in B \end{cases}$$

(**) $$g \circ f(m) = \begin{cases} g(m) = g'(m) & \text{falls } m \in \Omega_o \setminus (\hat{B} \cup B) \\ g(b) = m = g'(m) & \text{falls } m = \hat{b} \in \hat{B} \\ g(m) = g'(m) & \text{falls } m \in B \cap \Omega_o \end{cases}$$

Für alle w' mit $\tau(w') \leq n-1$ sei die Behauptung gezeigt und es sei $\tau(\omega w)=n$ mit $\omega w = \omega w_1..w_{s(\omega)}$. Dann ist $s(\omega)\geq 1$ und es folgt

$$
\begin{aligned}
(*) \qquad f \circ g'(\omega w_1..w_s) &= f(\omega g'w_1..g'w_s) \\
&= \omega f g'w_1..fg'w_s \\
&= \omega f w_1..fw_s \\
&= f(\omega w_1..w_s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(**) \qquad g \circ f(\omega w_1..w_s) &= g(\omega fw_1..fw_s) \\
&= \omega gfw_1..gfw_s \\
&= \omega g'w_1..g'w_s \\
&= g'(\omega w_1..w_s)
\end{aligned}
$$

Nach (*) folgt dann : $f(g'(M)) = A$ und $f(g'(N)) = C$.
Also berechnen $g'(M)$ und $g'(N)$ die Mengen A bzw. C, und da M und N bereits optimal gewählt waren, folgt mit Lemma 3.5 :
$L^*(A \bmod C) = L^*(g'(M) \bmod g'(N))$
Aus (**) erhält man $g'(M)=g(A)$ und $g'(N)=g(C)$, woraus die Behauptung folgt.

qed.

Satz 3.7

Seien Δ^* ein Typ mit Verzweigungen, $W(\Delta^*)$ die Δ^*-Wortalgebra und $A,B,C \in \mathcal{E}(W^*)$. Dann gilt
$L^*_{(min)}(A \bmod B \cup C \mid W(\Delta^*)) = L^*_{(min)}(A \bmod C \mid W_\Delta(B))$

Beweis durch vollständige Induktion über $\tau(A)$:

(τ bzgl. $W(\Delta^*)$) Sei $\tau(A)=0$,dann gibt es in A nur nullstellige

Elemente a, für die wir ja immer t(a)=0 voraussetzen wollen. Also ist $L^*(A \bmod B \cup C \mid W(\Delta^*)) = 0$. Eine Berechnung in $W(\Delta^* \sqcup B)$ von A ist zum Beispiel die Menge g(A) , für die ebenso $L^*(g(A) \mid W(\Delta^* \sqcup B)) = 0$ gilt. Mit Lemma 3.6 folgt dann $L^*(A \mid W_{\Delta^*}(B)) = 0$. Wir benötigen noch :

(1) Gibt $\widetilde{V}$ die Bildung der Vorgängermengen in $W(\Delta^* \sqcup B)$ an, so gilt für $A \cap B = \emptyset$: $\widetilde{V}(g(A)) = g(V(A))$

(2) Für $A \cap B = \emptyset$ gilt : $\sum_{\omega w \in A} t(\omega) = \sum_{\omega' w' \in g(A)} \widetilde{t}(\omega')$.

Der Satz sei für alle A' mit $\tau(A') \leq n-1$ bewiesen und es sei $\tau(A)=n$. Dann kann man auf alle Vorgängermengen von A die Induktionsvoraussetzung anwenden und es gilt mit (1), (2) und Lemma 3.6 :

$$L^*(A \bmod B \cup C \mid W(\Delta^*)) =$$

$$= \sum_{\omega w \in A \setminus (B \cup C)} t(\omega) + \max_{\alpha} L^*(V_\alpha(A \setminus (B \cup C)) \bmod A \cup B \cup C \mid W(\Delta^*))$$

$$= \sum_{\omega w \in A \setminus (B \cup C)} t(\omega) + \max_{\alpha} L^*(V_\alpha(A \setminus (B \cup C)) \bmod A \cup C \mid W_{\Delta^*}(B))$$

$$= \sum_{\omega w \in A \setminus (B \cup C)} t(\omega) + \max_{\alpha} L^*(g(V_\alpha(A \setminus (B \cup C))) \bmod g(A \cup C) \mid W(\Delta^* \sqcup B))$$

$$= \sum_{\omega w \in A \setminus (B \cup C)} t(\omega) + \max_{\alpha'} L^*(\widetilde{V}_{\alpha'}(g(A) \setminus g(B \cup C)) \bmod g(A) \cup g(C))$$

$$= \sum_{\omega w \in g(A) \setminus g(C)} t(\omega) + \max_{\alpha'} L^*(\widetilde{V}_{\alpha'}(g(A) \setminus g(C)) \bmod g(A) \cup g(C))$$

$$= L^*(g(A) \bmod g(C) \mid W(\Delta^* \sqcup B))$$

$$= L^*(A \bmod C \mid W_{\Delta^*}(B))$$

Für L^*_{min} zeigt man die Lemmata 3.5 und 3.6 analog, dann braucht in diesem Beweis nur jeweils min für max eingesetzt zu werden.

qed.

Satz 3.8

Mit den Bezeichnungen von Satz 3.7 gilt

$T^*(A \bmod B \cup C \mid W(\Delta^*)) = T^*(A \bmod C \mid W_{\Delta^*}(B))$.

Beweis: Es genügt zu zeigen :

$T^*(\omega w \bmod C \cup B \mid W(\Delta^*)) = T^*(\omega w \bmod C \mid W_{\Delta^*}(B))$. Dazu zeigt man analog zu Lemma 3.6 :

(*) $T^*(\omega w \bmod C \mid W_{\Delta^*}(B)) = T^*(g(\omega w) \bmod g(C) \mid W(\Delta^* \dot\cup B))$

Der Induktionsbeweis über $\tau(\omega w)$ sei hier nur für $\omega \in \Omega_a$ angegeben, für $\omega \in \Omega_\gamma$ folgt der Beweis völlig analog.

Für $\tau(\omega w)=0$ sind wie in Satz 3.7 beide Seiten gleich 0.

Sei die Aussage für alle $w' \in W^*$ mit $\tau(w') \leq n-1$ gezeigt, dann folgt mit (*) :

$$T^*(\omega w \bmod B \cup C \mid W(\Delta^*)) = t(\omega) + \max_{w' \in \mathrm{Im}\, w} T^*(w' \bmod B \cup C)$$

$$= t(\omega) + \max_{w' \in \mathrm{Im}\, w} T^*(w' \bmod C \mid W_{\Delta^*}(B))$$

$$= t(\omega) + \max_{w' \in \mathrm{Im}\, w} T^*(g(w') \bmod g(C) \mid W(\Delta^* \dot\cup B))$$

$$= T^*(\omega w \bmod C \mid W_{\Delta^*}(B))$$

qed.

Satz 3.9

T* ist die größte Abbildung $\lambda: \mathcal{E}(W^*) \longrightarrow [0,\infty]$ mit

(3.9.1) $\forall \omega \in \Omega \ \forall \langle w_1,..,w_s\rangle \in \mathrm{Def}\,\omega$ gilt

$$\lambda(\omega w_1..w_s) \leq t(\omega) + \min_{\substack{1\leq k\leq \mu(\omega)\\ \mu\geq 1}} \left\{\max(\lambda(w_k), \lambda(w_s))\right\}$$

und $\lambda(\emptyset) = 0$. $\qquad k=1$ für $\mu=0$

Beweis: T* erfüllt (3.9.1) folgt mit Definition 2.7.

$\lambda: \mathcal{E}(W^*) \longrightarrow [0,\infty]$ erfülle (3.9.1). Wir zeigen :

$\lambda(\omega w) \leq T^*(\omega w)$ für beliebiges $\omega w \in W^*$ durch Induktion über

$\tau(\omega w)$: Für $\tau(\omega w)=1$ folgt ($\tau(\omega w)=0$ ist trivial)

$$\lambda(\omega w) \leq t(\omega) + \min_k \left\{\max(\lambda(w_s),\lambda(w_k))\right\}$$

$$\leq t(\omega) + \min_k \left\{\max(t(w_s)+0, t(w_k)+0)\right\}$$

$$= t(\omega) + \min_k \left\{\max(0,0)\right\} = t(\omega) = T^*(\omega w)$$

Für alle $w' \in W^*$ mit $\tau(w') \leq n-1$ sei der Satz bewiesen und es sei $\tau(\omega w_1..w_s)=n$. Dann gilt für $w_1,..,w_s$ die Induktionsvoraussetzung und es folgt

$$\lambda(\omega w_1..w_s) \leq t(\omega) + \min_k \left\{\max(\lambda(w_k),\lambda(w_s))\right\}$$

$$\leq t(\omega) + \min_k \left\{\max(T^*(w_k),T^*(w_s))\right\}$$

$$= T^*(\omega w_1..w_s)$$

qed.

Satz 3.10 (Transitivität)

Für $E, D \in \mathcal{E}(W^*)$ und $\omega w \in W^*$ gilt

$T^*(\omega w \bmod D) \leq T^*(\omega w \bmod D \cup E) + T^*(E \bmod D)$

Beweis: O.B.d.A. kann $D = \emptyset$ angenommen werden , indem man zur kanonischen D-Expansion von W_{Δ^*} übergeht.

Wir zeigen : $\lambda: \mathcal{E}(W^*) \longrightarrow [0,\infty]$, erklärt durch $\lambda(\omega w) := T^*(\omega w) - T^*(E)$, $\lambda(F) := \max_{\omega w \in F} \lambda(\omega w)$, erfüllt (3.9.1) bei festem E in der kanonischen E-Expansion von $W(\Delta^*)$:

$$\begin{aligned}\lambda(\omega w) &= T^*(\omega w) - T^*(E)\\ &= t(\omega) + \min_k \{\max(T^*(w_k), T^*(w_s))\} - T^*(E)\\ &= t(\omega) + \min_k \{\max(T(w_k) - T^*(E), T^*(w_s) - T^*(E))\}\\ &= t(\omega) + \min_k \{\max(\lambda(w_k), \lambda(w_s))\}\end{aligned}$$

Also folgt mit Satz 3.9 : $\lambda(\omega w) \leq T^*(\omega w \bmod E)$ und somit $T^*(\omega w) \leq T^*(\omega w \bmod E) + T^*(E)$

qed.

Die Transitivitätssätze 3.4 und 3.10 sagen aus, daß man bei der Berechnung einer Menge innerhalb der Wortalgebra $W(\Delta^*)$ mindestens genau so schnell zum Ziel kommt, wenn man gleich die ganze Menge berechnet als wenn man zuerst eine Teilmenge berechnet und dann mit den gespeicherten Zwischenergebnissen den Rest berechnet.

Satz 3.11

L^* ist die größte Abbildung $\lambda: \mathcal{E}(W^*) \longrightarrow [0,\infty]$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$ und $\forall M \in \mathcal{E}(W^*) \forall \omega \in \Omega \forall w \in Def\omega$ gilt

$$(3.11.1) \quad \lambda(M \cup \{\omega w\}) \leq t(\omega) + \max_{\substack{1 \leq k \leq \mu(\omega) \\ \mu \geq 1 \\ k=1 \text{ für } \mu=0}} \lambda(M \cup V_k(\omega w))$$

Beweis: (a) L* erfüllt (3.11.1)

Es seien $M_1,..,M_n$ sämtliche Δ^*-Hüllen von $M \cup V_1(\omega w)$,..., ..,$M \cup V_\mu(\omega w)$, wobei $\omega w = \omega w_1..w_s$ gesetzt wurde($s \geq 2$). Dann sind $M_1 \cup \{\omega w\},..,M_n \cup \{\omega w\}$ sämtliche Δ^*-Hüllen von $M \cup \{\omega w\}$. Daher gibt es nach Korollar 3.2(iii) ein ν_o mit

$$(*) \quad L^*(M \cup \{\omega w\}) = \sum_{\omega' w' \in M_{\nu_o} \cup \{\omega w\}} t(\omega')$$

Zum weiteren Beweis unterscheiden wir 2 Fälle :

Fall 1 Es gibt ein ν_o gemäß (*) mit $\omega w \in M_{\nu_o}$. Dann folgt

$$L^*(M \cup \{\omega w\}) = \sum_{\omega' w' \in M_{\nu_o}} t(\omega')$$

$$\leq \max_{\nu=1}^{n} \Big(\sum_{\omega' w' \in M_\nu} t(\omega') \Big)$$

$$\leq t(\omega) + \max_{k=1}^{\mu} L^*(M \cup V_k(\omega w))$$

Fall 2 Es gibt ein ν_o gemäß (*) mit $\omega w \notin M_{\nu_o}$. Dann folgt

$$L^*(M \cup \{\omega w\}) = t(\omega) + \sum_{\omega' w' \in M_{\nu_o}} t(\omega')$$

$$\leq t(\omega) + \max_{\nu=1}^{\mu} \Big(\sum_{\omega' w' \in M_\nu} t(\omega') \Big)$$

$$\leq t(\omega) + \max_{k} L^*(M \cup V_k(\omega w))$$

Der Fall $s(\omega) = 1$ ist trivial.

(b) λ erfülle (3.11.1), zu zeigen: $\lambda(M) \leq L^*(M)$ für $M \in \mathcal{E}(W^*)$.

Beweis durch Induktion über $\eta(M) := \max_{M' \text{ist } \Delta^*\text{-Hülle v.M}} \# M'$

Für $\eta(M) = 1$ ist $M = \{\omega\}$ mit $\omega \in \Omega_o$.

Dann gilt $\lambda(M) \leq t(\omega) + \max_k \lambda(V_k(\omega))$

$= t(\omega) + \lambda(\emptyset) = t(\omega) = L^*(M)$

Sei $\eta(M)=n$ und für alle M' mit $\eta(M')\leq n-1$ sei die Behauptung bewiesen. Die Mengen $M_1,..,M_r$ seien alle Δ^*-Hüllen von M. Wir wählen ein bezüglich der Tiefe τ maximales Element $\omega w = \omega w_1..w_s \in M$ mit $s\geq 2$ (Für $s=1$ ist der Beweis trivial). ωw liegt in keiner Hülle einer der Mengen $(M\setminus\{\omega w\})\cup V_k(\omega w)$, $k=1,..,\mu(\omega)$, da ωw anderenfalls als Vorgänger eines Elementes $w'\in M$ nicht maximal wäre. Man kann deswegen auf diese Mengen die Induktionsvoraussetzung anwenden. $M_1\setminus\{\omega w\},..,M_r\setminus\{\omega w\}$ sind genau alle Δ^*-Hüllen dieser Mengen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lambda(M) &= \lambda((M\setminus\{\omega w\})\cup\{\omega w\}) \\
&\leq t(\omega) + \max_{1\leq k\leq \mu} \lambda((M\setminus\{\omega w\})\cup V_k(\omega w)) \\
&\leq t(\omega) + \max_{1\leq k\leq \mu} L^*((M\setminus\{\omega w\})\cup V_k(\omega w)) \\
&= t(\omega) + \max_{1\leq l\leq r} \Big(\sum_{\omega' w'\in M_l\setminus\{\omega w\}} t(\omega') \Big) \\
&= \max_{1\leq l\leq r} \Big(\sum_{\omega w\in M_l} t(\omega) \Big) = L^*(M)
\end{aligned}$$

qed.

Satz 3.12

L^*_{min} ist die größte Abbildung $\lambda: \mathcal{E}(W^*) \longrightarrow [0,\infty]$ mit

(3.12.1) $\lambda(\emptyset)=0$ und $\forall M\in\mathcal{E}(W^*)\ \forall \omega\in\Omega\ \forall w\in \mathrm{Def}\,\omega$ gilt

$$\lambda(M\cup\{\omega w\}) \leq t(\omega) + \min_{\substack{1\leq k\leq \mu(\omega)\\ \mu\geq 1 \\ k=1 \text{ für } \mu=0}} \lambda(M\cup V_k(\omega w))$$

Beweis: Für $k=1,..,\mu(\omega)$ mit $s(\omega)\geq 2$ und für $k=1$, falls $s(\omega)=1$, gilt :

$$
\begin{aligned}
L^*_{min}(M \cup \{\omega w\}) &\leq L^*_{min}(M \cup \{\omega w\} \cup V_k(\omega w)) \\
&\leq L^*_{min}(M \cup V_k(\omega w)) + L^*_{min}(\{\omega w\} \bmod V_k(\omega w)) \\
&= L^*_{min}(M \cup V_k(\omega w)) + t(\omega) \\
&\qquad + \min_j L^*_{min}(V_j(\omega w) \bmod V_k(\omega w) \cup \{\omega w\}) \\
&= L^*_{min}(M \cup V_k(\omega w)) + t(\omega) + 0
\end{aligned}
$$

Da diese Beziehung für alle k gilt, die zur Konkurrenz stehen, folgt (3.12.1) für L^*_{min} . Der zweite Teil des Beweises folgt analog zu Satz 3.11, es genügt, jeweils für max min einzusetzen.

qed.

Definition 3.13

Eine Abbildung $\lambda(.\bmod.) : \mathcal{E}^2(W^*) \longrightarrow [0,\infty]$ heißt

(a) L^*_{min}-artig , wenn gilt

(i) $\lambda(E \bmod E) = 0$

(ii) $\lambda(F \bmod E)$ ist isoton in F und antiton in E

(iii) $\lambda(F \cup E \bmod D) \leq \lambda(F \bmod E \cup D) + \lambda(E \bmod D)$

(b) T*-artig , wenn (i),(ii) gelten sowie

(iv) $\lambda(\{\omega w\} \bmod D) \leq \lambda(\{\omega w\} \bmod E \cup D) + \lambda(E \bmod D)$

(v) $\lambda(F \bmod E) = \max_{\omega w \in F} \lambda(\{\omega w\} \bmod E)$

Satz 3.14

$L^*_{min}(.\bmod.)$ ist die größte Abbildung $\lambda(.\bmod.): \mathcal{E}^2(W^*) \longrightarrow [0,\infty]$, die L^*_{min}-artig ist und für die gilt:

(3.14.1) $\lambda(\{\omega w\} \bmod V_k(\omega w)) \leq t(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \; \forall w \in Def\omega \; \forall k \in \{1,..,\mu(\omega)\}$ bzw. $k=1$ für $s(\omega)=1$

Beweis: L^*_{min} ist L^*_{min}-artig folgt mit den Sätzen 3.3 und 3.4. Die Aussage (3.14.1) ist innerhalb des Beweises zu Satz 3.12 gezeigt worden.

$\lambda(.\text{mod},)$ sei L^*_{min}-artig und erfülle (3.14.1) ; $E \in \mathcal{E}(W^*)$ sei fest . Dann gilt für alle k=1,..,$\mu(\omega)$ (bzw.k=1 falls $s(\omega)=1$) und für alle $F \cup \{\omega w\} \in \mathcal{E}(W^*)$:

$$\lambda(F\cup\{\omega w\} \bmod E) \leq \lambda(F\cup\{\omega w\}\cup V_k(\omega w) \bmod E)$$

$$\leq \lambda(\{\omega w\} \bmod V_k(\omega w)\cup F\cup E)+\lambda(F\cup V_k(\omega w) \bmod E)$$

$$\leq t(\omega) + \lambda(F\cup V_k(\omega w) \bmod E)$$

Damit gilt

$$\lambda(F\cup\{\omega w\} \bmod E) \leq t(\omega) + \min_k \lambda(F\cup V_k(\omega w) \bmod E)$$

und $\lambda(.\text{mod } E)$ erfüllt (3.12.1) in der kanonischen E-Expansion von $W(\Delta^*)$. Nach Satz 3.12 gilt dann

$$\lambda(.\text{mod } E) \leq L^*_{min}(.\text{mod} E)$$

Diese Betrachtung gilt für alle $E\in\mathcal{E}(W^*)$, woraus $\lambda(.\text{mod.}) \leq L^*_{min}(.\text{mod.})$ folgt.

qed.

Satz 3.15

$T^*(.\text{mod.})$ ist die größte Abbildung $\lambda(.\text{mod.}) : \mathcal{E}^2(W^*) \longrightarrow [0,\infty]$, die T^*-artig ist und für die (3.14.1) gilt .

Beweis: Aus der Definition 2.7 und aus Satz 3.10 folgt : T^* erfüllt die Bedingungen des Satzes .

$\lambda(.\text{mod.})$ sei T^*-artig und erfülle (3.14.1). $D\in\mathcal{E}(W^*)$ sei fest.

Dann gilt für $\omega w = \omega w_1 .. w_s$ und $k=1,..,\mu(\omega)$,falls $s(\omega)\geq 2$, oder $k=1$, falls $s(\omega)=1$:

$$\lambda(\{\omega w\} \bmod D) \leq \lambda(\{\omega w\} \bmod D \cup V_k(\omega w)) + \lambda(V_k(\omega w) \bmod D)$$

$$\leq t(\omega) + \lambda(V_k(\omega w) \bmod D)$$

$$\leq t(\omega) + \max_{w' \in V_k(\omega w)} \lambda(\{w'\} \bmod D)$$

$$= t(\omega) + \max_k \left\{ \lambda(\{w_k\} \bmod D), \lambda(\{w_s\} \bmod D) \right\}$$

Damit erfüllt $\lambda(.\bmod D)$ dann (3.9.1) in der kanonischen D-Expansion von $W(\triangle^*)$, also gilt mit Satz 3.9 : $\lambda(.\bmod D) \leq T^*(.\bmod D)$. Dies gilt wieder für alle Wortmengen $D \in \mathcal{E}(W^*)$, woraus die Behauptung folgt. qed.

Lemma 3.16

Seien M,N Mengen , $f : \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}(N)$ eine vereinigungstreue Abbildung, $\lambda: \mathcal{E}^2(N) \longrightarrow [0,\infty]$ eine Abbildung. Dann gilt :

(1) Ist λ L^*_{min}-artig, so ist auch $\lambda(f(.)\bmod f(.))$ L^*_{min}-artig.

(2) Ist λ T^*-artig, so ist auch $\lambda(f(.)\bmod f(.))$ T^*-artig.

Von dem sehr einfachen Beweis sei hier als Beispiel (iii) aus Definition 3.13 gezeigt , λ sei L^*_{min}-artig :

$$\lambda(f(E\cup F) \bmod f(D)) = \lambda(f(E)\cup f(F) \bmod f(D))$$

$$\leq \lambda(f(E) \bmod f(D) \cup f(F)) + \lambda(f(F) \bmod f(D))$$

$$= \lambda(f(E) \bmod f(D\cup F)) + \lambda(f(F) \bmod f(D))$$

Satz 3.17 (Simulationssatz)

Seien $W(\Delta^*)$ und $W(\Delta^{*\prime})$ Wortalgebren vom Typ Δ^* bzw. $\Delta^{*\prime}$; t und t' seien Operationszeiten für $W(\Delta^*)$ bzw. $W(\Delta^{*\prime})$ mit $t(\omega)=0=t'(\omega')$ für nullstellige Operationssymbole ; $f : \mathcal{E}(W^*) \longrightarrow \mathcal{E}(W^{*\prime})$ sei eine vereinigungstreue Abbildung , $0 \leq c \in \mathbb{R}$.

(i) Gilt $\forall \omega \in \Omega \ \forall w \in Def\omega \ \forall k \in \{1,..,\mu(\omega)\}$ oder $k=1$

$L^*_{min}(f(\omega w) \bmod f(V_k(\omega w)) \mid W(\Delta^{*\prime})) \leq c \cdot t(\omega)$, so folgt

$L^*_{min}(f(F) \bmod f(E) \mid W(\Delta^{*\prime})) \leq c \cdot L^*_{min}(F \bmod E \mid W(\Delta^*))$

(ii) Gilt $\forall \omega \in \Omega \ \forall w \in Def\omega \ \forall k \in \{1,..,\mu(\omega)\}$ oder $k=1$

$T^*(f(\omega w) \bmod f(V_k(\omega w)) \mid W(\Delta^{*\prime})) \leq c \cdot t(\omega)$, so folgt

$T^*(f(F) \bmod f(E) \mid W(\Delta^{*\prime})) \leq c \cdot T^*(F \bmod E \mid W(\Delta^*))$

Beweis: O.B.d.A. sei $c=1$.

(i) $L^*_{min}(.\bmod.\mid W(\Delta^{*\prime}))$ ist L^*_{min}-artig, daher ist nach Lemma 3.16 auch $L^*_{min}(f(.) \bmod f(.) \mid W(\Delta^{*\prime}))$ L^*_{min}-artig. Mit Satz 3.14 ergibt sich die Behauptung (i).

(ii) $T^*(f(.) \bmod f(.) \mid W(\Delta^{*\prime}))$ ist mit Lemma 3.16 T^*-artig. Mit Satz 3.11 folgt die Behauptung (ii) . qed.

Für die (maximale) Länge L^* kann man keine analoge Form des Simulationssatzes angeben. Es gilt im allgemeinen $L^*(\{\omega w\} \bmod V_k(\omega w)) > t(\omega)$ für alle k. Wir geben daher für L^* einen Simulationssatz mit einer schärferen Voraussetzung an die Abbildung f an.

Satz 3.18 (Simulationssatz)

Seien $W(\Delta^*)$ und $W(\Delta^{*\prime})$ Wortalgebren mit den Operationszeiten t bzw. t' (beide =0 für nullstellige Operationssymbole); $0 \leq c \in \mathbb{R}$; $f : W(\Delta^*) \longrightarrow W(\Delta^{*\prime})$ sei ein φ-Homomorphismus und es gelte $t'(\varphi(\omega)) \leq c \cdot t(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

Dann gilt für alle $E, F \in \mathcal{E}(W^*)$

$L^*(f(E) \bmod f(F) \mid W(\Delta^{*\prime})) \leq c \cdot L^*(E \bmod F \mid W(\Delta^*))$

Beweis: O.B.d.A. sei c=1 .

$F \in \mathcal{E}(W^*)$ sei fest gewählt, ferner sei mit $\omega w = \omega w_1 .. w_s \in W^*$ $f(\omega w_1 .. w_s) = \omega' f w_1 .. f w_s$. Dann gilt für $s(\omega) \geq 2$

$$L^*(f(E \cup \{\omega w\}) \bmod f(F)) = L^*(f(E) \cup \{\omega' f w_1 .. f w_s\} \bmod f(F))$$

$$\leq t(\omega') + \max_k L^*(f(E) \cup V_k(\omega' f w_1 .. f w_s) \bmod f(F))$$

$$\leq t(\omega) + \max_k L^*(f(E) \cup f(V_k(\omega w)) \bmod f(F))$$

$$= t(\omega) + \max_k L^*(f(E \cup V_k(\omega w)) \bmod f(F))$$

Dabei ist L^* jeweils in $W(\Delta^{*\prime})$ zu nehmen. Es folgt: $L^*(f(.) \bmod f(F) \mid W(\Delta^{*\prime}))$ erfüllt (3.11.1) in der kanonischen F-Expansion von $W(\Delta^*)$. Mit Satz 3.11 folgt dann die Behauptung. Für $s(\omega)=1$ folgt die Behauptung wie oben.

qed.

4. Rechenzeiten in beliebigen Systemen von Palgebren mit Verzweigungen

Die bisher gewonnenen Aussagen über Rechenzeiten gelten nur für die zu einem Typ $\triangle^*$ gehörende Wortalgebra $W(\triangle^*)$ bzw. für eine kanonische Y-Expansion von $W(\triangle^*)$. Hat man eine beliebige $\triangle^*$-Palgebra mit Verzweigungen $\mathfrak{A}$ und will eine Teilmenge $B \in \mathcal{E}(A)$ berechnen (A =Vereinigung der Trägermengen von $\mathfrak{A}$), so benötigt man eine Menge $M \in \mathcal{E}(W^*)$ mit $f_{\mathfrak{A}}(M) \supset B$ .Das folgende Beispiel läßt vermuten (Korollar 5.3 beweist es), daß man bei nur einer $\triangle^*$-Palgebra immer auf Verzweigungen verzichten kann.

Beispiel 4.1

Der Typ $\triangle^*$ und die Operationszeit t seien wie in Beispiel 2.9 gegeben. Dort galt

$$L^*(\{ifC/XY=YO\}) = 4$$

Sei $\mathfrak{A}$ eine $\triangle^*$-Palgebra ; wir können $\mathfrak{A}$ zum Beispiel auffassen als $\{x,y\}$-Expansion von $\mathbb{R}$, in der bis auf die Division durch 0 alle Operationen erklärt sind. Das Element $A \ni c := f_{\mathfrak{A}}(C)$ möge eine Fehlermeldung bewirken.
Ist $y = f_{\mathfrak{A}}(Y) \neq 0$, dann wird $\frac{x}{y}$ durch die Menge $M := \{ifC/XY=YO\}$ berechnet.
Aber: Die Menge ohne Verzweigungen $M' := \{X,Y,/XY\}$ berechnet $\frac{x}{y}$ auch schon, und zwar mit der besseren Länge $L^*(M') = 3$. Man kann also in diesem Fall aus einer Berechnung mit Verzweigungen die Verzweigungen "herauswerfen" und bekommt eine Berechnung ohne Verzweigungen kleinerer Länge, die die gleiche Menge berechnet. Satz 5.2 und

Korollar 5.3 werden zeigen, daß dies allgemein gilt.

Um eine vernünftige Anwendung für Berechnungen mit Verzweigungen zu finden, werden die Rechenzeiten in Systemen von Palgebren mit Verzweigungen erklärt :

Definition 4.2

Sei J eine Indexmenge ; $\mathfrak{A}$ sei eine Abbildung, die jedem $j \in J$ eine Δ^*-Palgebra mit Verzweigungen $\mathfrak{A}_j$ zuordnet. Das System dieser Palgebren werde mit $(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ bezeichnet. Ferner sei $(B_j)_{j\in J}$ ein System von endlichen Teilmengen : $B_j \in \mathcal{E}(A_j)$ für $j \in J$,wobei A_j die Vereinigung der Trägermengen von $\mathfrak{A}_j$ bezeichne. Eine Menge $M \in \mathcal{E}(W^*)$ berechnet das System $(B_j)_{j\in J}$, wenn für alle $j \in J$ gilt :
$f_{\mathfrak{A}_j}(M) \supset B_j$ oder $B_j = \emptyset$.
$(B_j)_{j\in J}$ heißt in diesem Fall berechenbar .

Für $f_{\mathfrak{A}_j}(M) \supset B_j$ sagen wir auch : M berechnet B_j in der Δ^*-Palgebra $\mathfrak{A}_j$ (auch falls M das System $(B_j)_{j\in J}$ nicht berechnet). Ist $B_j = \emptyset$ und $f_{\mathfrak{A}_j}(M)$ nicht definiert, so sagen wir zur einfachereren Formulierung späterer Sätze auch : M berechnet B_j in $\mathfrak{A}_j$. Es gilt also :
M berechnet $(B_j)_{j\in J}$ genau dann, wenn M für jedes $j \in J$ die Menge B_j in $\mathfrak{A}_j$ berechnet.
Besteht kein Zweifel über die Indexmenge, so schreiben wir zur Abkürzung auch (B_j) für ein Mengensystem $(B_j)_{j\in J}$.

Die Definition der Rechenzeiten von Systemen von

Teilmengen eines Systems von Palgebren geschieht nun in Verallgemeinerung von Definition 1.8 :

Definition 4.3

Sei $(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ ein System von Δ^*-Palgebren mit Verzweigungen, (B_j) sei ein berechenbares Mengensystem. Dann wird erklärt:

$$L^*((B_j)) := \min\{L^*(M) : M\in\mathcal{E}(W^*) \text{ berechnet } (B_j)\}$$

$$L^*_{min}((B_j)) := \min\{L^*_{min}(M) : M\in\mathcal{E}(W^*) \text{ berechnet } (B_j)\}$$

$$T^*((B_j)) := \min\{T^*(M) : M\in\mathcal{E}(W^*) \text{ berechnet } (B_j)\}$$

Ist (B_j) berechenbar, dann kann man die Existenz der obigen Minima wegen Lemma 1.9 voraussetzen.

Beispiel 4.4

Der Typ Δ^* sei wie in Beispiel 4.1 gegeben. Als System von Δ^*-Palgebren kann man die Menge aller $\{x\}$-Expansionen von $\mathbb{R}$ auffassen, dieses System sei $(\mathfrak{A}_x)_{x\in\mathbb{R}}$. P und Q seien Worte der Wortalgebra $W(\Delta^*)$, die gebildet seien aus $0,1,X,+,-,*$,das heißt "ganzzahlige Polynome" in X . $f_{\mathfrak{A}_x}(P) =: p(x)$ und $f_{\mathfrak{A}_x}(Q) =: q(x)$ seien die Auswertungen an der Stelle $x\in\mathbb{R}$. Zur Vereinfachung sei hier angenommen, daß P und Q die Länge 0 haben, ferner sei hier $t(C)=t(/)=3$ angenommen. C interpretiere man dabei als Wort der Länge 3, die Forderung $t(\omega)=0$ für $s(\omega)=0$ spielt in diesem Zusammenhang keine Rolle. Sei $f_{\mathfrak{A}_x}(C) =: c_x$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Es wird ein Mengensystem $(R_x)_{x\in\mathbb{R}}$ definiert durch

$$R_x := \begin{cases} \frac{p(x)}{q(x)} & \text{falls } q(x) \neq 0 \\ c_x & \text{sonst} \end{cases}$$

(R_x) ist offensichtlich berechenbar und wird optimal berechnet von M:= $\{$ifC/PQ=QO$\}$.

Dann gilt $L^*(M) = 5 = L^*((R_x))$.

Die günstigste Menge ohne Verzweigungen, die (R_x) berechnet, ist N :=$\{$C,/PQ$\}$ mit $L^*(N) = 6$.

In diesem Fall ist das Verwenden von Verzweigungen in der Berechnung günstiger und die Längendefinition in Definition 4.3 erscheint sinnvoll.

Wie später gezeigt wird (Satz 7.4), gibt es eine Berechnung ohne Verzweigungen , die fast alle R_x in $\mathfrak{A}_x$ berechnet (fast alle im Sinne einer irreduziblen Topologie) mit höchstens der Rechenzeit der Berechnung mit Verzweigungen. Im vorliegenden Beispiel ist diese Aussage trivial, man nehme die Menge M´ := $\{$/PQ$\}$ mit $L^*(M') = 3$.

M´ berechnet alle R_x in $\mathfrak{A}_x$ bis auf die R_x mit $q(x)=0$.

Systeme von Expansionen von $\triangle^*$-Palgebren

Ziel dieses Abschnittes ist es, einen Transitivitätssatz für die Längen L^* und L^*_{min} herzuleiten mit der Aussage, daß bei der Berechnung eines Mengensystems die Berechnung eines Teilsystems mit anschließender Verwertung der Zwischenergebnisse insgesamt keine Verringerung der Rechenzeit mit sich bringt . Dazu ist zunächst $L^*((B_j) \bmod (C_j))$ zu erklären.

Ist $\mathfrak{A}$ eine $\triangle^*$-Palgebra, so ist eine X-Expansion von $\mathfrak{A}$

festgelegt durch $\alpha_x(\emptyset) = a \in A$ für $x \in X$. Ist $(\mathcal{A}_j)_{j\in J}$ ein System von $\triangle^*$-Halgebren, $C_j \subset A_j$ Teilmengen, so kann man verschiedene X-Expansionen der $\mathcal{A}_j$ festlegen (mit einem festen X) , in denen gerade alle $c_{jk} \in C_j$ nullstellig erzeugt werden, zum Beispiel durch

$$X := \bigsqcup_{\substack{c_{jk}\in C_j \\ j\in J}} c_{jk}$$

mit $\alpha^j_{c_{jk}}(\emptyset) := c_{jk}$. In dem dadurch erzeugten System von Expansionen $(\mathcal{A}_j(X))_{j\in J}$ würde man jedoch unendliche Mengen benötigen, um bestimmte Mengensysteme zu berechnen.
So wäre zum Beispiel $(p(x)q(x))_{x\in\mathbb{R}}$ mit $p(x),q(x)$ aus Beispiel 4.4 im System der $\bigsqcup_{x\in\mathbb{R}} \{p(x),q(x)\}$-Expansionen der $\mathcal{A}_x$ nicht berechenbar. Wir wollen aber in Verallgemeinerung der Definition von L*(.mod.)
$L^*((p(x)q(x))\mathrm{mod}\{p(x),q(x)\}) = t(*)$ erhalten.

Zur Definition von "zulässigen" Systemen von Expansionen benötigen wir noch den Begriff der X-Einsetzung :

Definition 4.5

Sei $\triangle^*$ ein Typ mit Verzweigungen ; X sei eine Menge und $\triangle^* \sqcup X$ ein neuer Typ. Eine Abbildung $g : \mathcal{E}(W^*_{\triangle^*\sqcup X}) \longrightarrow \mathcal{E}(W^*)$ heißt eine X-Einsetzung , wenn gilt :
$\tilde{g} \mid \Omega_o = id_{\Omega_o}$, $\tilde{g}(x) \in W^i(\triangle^*)$ für $x \in X$ mit $z'(x) = i$,
$\tilde{g}(\omega w_1 .. w_s) = \omega \tilde{g}w_1 .. \tilde{g}w_s$ für $s(\omega) \geq 1$ und g ist die vereinigungstreue Fortsetzung von $\tilde{g}$.

Definition 4.6

Sei $(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ ein System von $\triangle^*$-Palgebren mit Verzweigungen, (C_j) sei ein berechenbares Mengensystem ; X sei eine Menge und g eine X-Einsetzung $g : \mathcal{E}(w^*_{\triangle\cup X}) \longrightarrow \mathcal{E}(w^*)$.
Ein System von X-Expansionen $(\mathfrak{A}_j(X))_{j\in J}$ heißt zulässig bzgl. (C_j) (und g) ,falls gilt :

(1) Für alle $j\in J$ mit $C_j \neq \emptyset$ ist $f_{\mathfrak{A}_j(X)}(X) = C_j$,für $C_j = \emptyset$ ist $f_{\mathfrak{A}_j(X)}(X)$ nicht definiert .

(2) Für $x\in X$ gilt $f_{\mathfrak{A}_j(X)}(x) = f_{\mathfrak{A}_j}(g(x))$.

Satz 4.7

Für berechenbare Mengensysteme (C_j) existiert stets eine bzgl. (C_j) zulässiges System von X-Expansionen mit

$$\#\# X < \infty .$$

Beweis: Die Menge M berechne (C_j). Sei $M = \{w_1,..,w_r\}$. Sei $X = \{x_1,..,x_r\}$ eine Menge neuer Zeichen mit $X \cap \Omega = \emptyset$. Durch $g(x_i) := w_i$, i=1,..,r, und $\alpha^j_{x_k}(\emptyset) := f_{\mathfrak{A}_j}(w_k) \cap C_j$ wird ein bzgl. (C_j) und g zulässiges System von X-Expansionen $(\mathfrak{A}_j(X))_{J\in J}$ festgelegt. ged.

Das folgende Beispiel zeigt, daß nicht jedes bzgl. (C_j) zulässige System von X-Expansionen zum Transitivitätssatz führt, wenn man $L^*((B_j) \bmod (C_j))$ als Länge $L^*((B_j))$ im System der X-Expansionen erklärt :

Beispiel 4.8

Die Worte $w, w_1, w_2, w_3 \in W^*$, jeweils mit der Länge 1 ,mögen $a_j', a_j^1, a_j^2, a_j^3 \in A_j$ berechnen für $j \in J$, wobei A_j die Vereinigung der Trägermengen von $\mathfrak{A}_j$ bezeichne.
Sei für alle $j \in J$: $\alpha_\sigma^j \vec{a}_j := \alpha_\sigma^j(a_j^1, a_j^2, a_j^3)$ mit

$$\alpha_\sigma^j \vec{a}_j = \begin{cases} a_j^1 & \text{falls } a_j^3 = T \\ a_j^2 & \text{falls } a_j^3 = F \end{cases}$$

α_σ^j wählt also nach einer Abfrage des Wahrheitswertes a_j^3 entweder a_j^1 oder a_j^2 aus. Sei $C_j := \{\alpha_\sigma^j \vec{a}_j\}$ für $j \in J$.

Mit $t(\sigma)=1$ ist dann

(4.8.1) $L^*((C_j)) = L^*(\{w_1, w_2\}) = 2$

Das System der $\{x\}$-Expansionen der $\mathfrak{A}_j$, festgelegt durch

$$\alpha_x^j(\emptyset) := \alpha_\sigma^j \vec{a}_j$$

ist zulässig bzgl. (C_j) und g mit $g(x) := \sigma w_1 w_2 w_3$.
Definiert man $L^*((B_j) \mathrm{mod} (C_j))$ als Länge $L^*((B_j))$ in diesem System $(\mathfrak{A}_j(\{x\}))_{j \in J}$, so folgt :

Mit

$$B_j := \begin{cases} a_j' * a_j^1 & \text{falls } a_j^3 = T \\ a_j' * a_j^2 & \text{falls } a_j^3 = F \end{cases}$$

und mit $t(*) = 1$ wird

(4.8.2) $L^*((B_j) \mathrm{mod} (C_j)) = L^*(\{*wx\}) = 2$

Falls der Transitivitätssatz gelten soll, muß also $L^*((B_j \cup C_j)) \leq 4$ gelten. Aber: $\{w_1, w_2, *ww_1, *ww_2\}$ berechnet $(B_j \cup C_j)$ mit der Länge 5 , ebenso hat $\{\sigma w_1 w_2 w_3, *w\sigma w_1 w_2 w_3\}$ die Länge 5 . Eine bessere Berechnung für $(B_j \cup C_j)$ gibt es nicht .

Der Grund für das Scheitern dieses weges liegt darin, daß man bei der Berechnung (aufgefaßt als Teilmenge der Wortalgebra) von (B_j) modulo (C_j) bei (4.8.2) auf das Zwischenergebnis x zugegriffen hat, das eigentlich gar nicht vorlag. Bei der Berechnung von (C_j) bei (4.8.1) hat man innerhalb der Wortalgebra die Zwischenergebnisse w_1 und w_2 . Man darf bei Berechnungen von Mengensystemen nur auf Zwischenergebnisse aus der Wortalgebra zugreifen, die bei der Berechnung von Teilsystemen tatsächlich vorgelegen haben, das heißt man muß im vorliegenden Fall von den Zwischenergebnissen w_1 und w_2 ausgehen und die weitere Berechnung modulo $\{w_1,w_2\}$ ausführen.
Wir fordern deswegen, daß Zwischenberechnungen bereits optimal sein müssen :

Definition 4.9

Sei $(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ ein System von Δ^*-Palgebren mit Verzweigungen; (B_j) und (C_j) seien berechenbare Mengensysteme. Dann sei

$$L^*((B_j)\mathrm{mod}(C_j)) := \min\{L^*((B_j)) \text{ in } (\mathfrak{A}_j(X)) : \exists \text{ Menge X und X-Einsetzung g,s.d.}(\mathfrak{A}_j(X)) \text{ zulässig bzgl.}(C_j) \text{ und g ist und g(X) das System } (C_j) \text{ optimal berechnet}\}$$

Für Beispiel 2.8 kann man dann eine $\{x_1,x_2\}$-Einsetzung definieren durch $g(x_1)=w_1$ und $g(x_2)=w_2$. Dann wird $L^*((B_j)\mathrm{mod}(C_j)) = L^*(\{{}^*wx_1,{}^*wx_2\}) = 3$ und es gilt die Transitivität. Bevor der Transitivitätssatz allgemein

gezeigt wird, muß noch eine Aussage über X-Einsetzungen bewiesen werden :

Satz 4.10

Sei g eine X-Einsetzung. Dann gilt

$$L^*(M \bmod N \mid W(\Delta^* \cup X)) \trianglerighteq L^*(g(M) \bmod g(N \cup X) \mid W(\Delta^*))$$

Beweis durch Induktion über $\tau(M)$: (τ bezüglich $W(\Delta^* \cup X)$)

Sei $\tau(M)=0$, dann gilt

$L^*(M \bmod N \mid W(\Delta^* \cup X)) = 0$; Andererseits gilt

$$L^*(g(M) \bmod g(N \cup X) \mid W(\Delta^*)) =$$

$$\overset{(a)}{=} \sum_{\omega w \in g(M) \setminus g(N \cup X)} t(\omega) + \max_{\alpha} L^*(V_\alpha(g(M) \setminus g(N \cup X)) \bmod g(M \cup N \cup X))$$

$$\overset{(b)}{=} \sum_{\omega w \in g(M) \setminus g(N \cup X)} t(\omega) + 0 \overset{(c)}{\leq} \sum_{\omega w \in g(M \setminus (N \cup X))} t(\omega)$$

$$\overset{(d)}{=} \sum_{\omega w \in M \setminus (N \cup X)} t(\omega) = 0$$

(a) nach Definition von L^*

(b) $V_\alpha(g(M) \setminus g(N \cup X)) = \emptyset$ für alle $\alpha \in P(g(M) \setminus g(N \cup X))$

(c) da g vereinigungstreu ist

(d) wegen $g(\omega w_1 .. w_s) = \omega g w_1 .. g w_s$

Für alle M' mit $\tau(M') \leq n-1$ sei der Satz bewiesen und es sei $\tau(M)=n$, dann kann auf alle Vorgängermengen von M die Induktionsvoraussetzung angewendet werden und es gilt :

$$L^*(M \bmod N \,|\, w(\triangle^* \sqcup X)) = \sum_{\omega w \in M \setminus N} t(\omega) + \max_{\alpha} L^*(V_\alpha(M \setminus N) \bmod N \cup M)$$

$$\overset{(e)}{\geq} \sum_{\omega w \in M \setminus N} t(\omega) + \max_{\alpha'} L^*(g(V_{\alpha'}(M \setminus N)) \bmod g(M \cup N \cup X))$$

$$\overset{(f)}{\geq} \sum_{\omega w \in g(M) \setminus g(X \cup N)} t(\omega) + \max_{\alpha''} L^*(g(V_{\alpha''}(M \setminus (N \cup X))) \bmod g(M \cup N \cup X))$$

$$\overset{(g)}{=} \sum_{\omega w \in g(M) \setminus g(X \cup N)} t(\omega) + \max_{\beta} L^*(\tilde{V}_\beta(g(M \setminus (N \cup X))) \bmod g(M \cup X \cup N))$$

$$\overset{(f)}{\geq} \sum_{\omega w \in g(M) \setminus g(X \cup N)} t(\omega) + \max_{\beta'} L^*(\tilde{V}_{\beta'}(g(M) \setminus g(N \cup X)) \bmod g(M \cup X \cup N))$$

$$\overset{(a)}{=} L^*(g(M) \bmod g(N \cup X) \,|\, W(\triangle^*))$$

(e) nach Induktionsvoraussetzung

(f) wie im Induktionsanfang und mit der Isotonie von $L^*(.\text{mod}.)$ im ersten Argument

(g) $g(V_\alpha(A)) = \tilde{V}_{\alpha'}(g(A))$ für A mit $A \cap X = \emptyset$ nach Definition von g mit geeigneten α, α'; dabei bezeichne $\tilde{V}$ die Bildung der Vorgängermengen bzgl. $W(\triangle^*)$.

ged.

Satz 4.11 (Transitivität)

Sei $(\vartheta_j)_{j \in J}$ ein System von $\triangle^*$-Palgebren mit Verzweigungen, (B_j) und (C_j) seien berechenbare Mengensysteme. Dann gilt

$$L^*((B_j \cup C_j)) \leq L^*((B_j) \bmod (C_j)) + L^*((C_j))$$

Beweis: Sei $(\vartheta_j(X))_{j \in J}$ ein bezüglich (C_j) und g zulässiges System von X-Expansionen mit : $g(X) \in \mathcal{E}(W^*)$ berechnet

das System (C_j) optimal , also $L^*(g(X)) = L^*((C_j))$.
Die Menge $M \in \mathcal{E}(W^*_{\Delta^* \sqcup X})$ sei eine Berechnung mit
$L^*(M|W(\Delta^* \sqcup X)) = L^*((B_j) \bmod (C_j))$ .Dann gilt

$$L^*((B_j) \bmod (C_j)) + L^*((C_j)) = L^*(M|W(\Delta^* \sqcup X)) + L^*(g(X))$$

(Satz 4.10) $$\geq L^*(g(M) \bmod g(X) + L^*(g(X))$$

(Satz 3.4) $$\geq L^*(g(M \cup X))$$

(*) $$\geq L^*((B_j \cup C_j))$$

(*) Nach Definition 4.6,(2) gilt für $j \in J$:
$f_{\vartheta_j(X)}(M) = f_{\vartheta_j}(g(M))$, also berechnet $g(M)$ in jeder Palgebra die gleiche Menge wie M und $g(M \cup X)$ berechnet $(B_j \cup C_j)$.

qed.

Das folgende Beispiel zeigt, welche Schwierigkeiten bei der Herleitung weiterer allgemeiner Abschätzungen über die Rechenzeiten in Systemen von Δ^*-Palgebren entstehen :

Beispiel 4.12

Sei $\Omega := \{X, C, 0, 1, +, -, *, /, =, \text{if}\}$; t sei eine Operationszeit mit

$$t(X)=t(0)=t(1)=0 \; ; \; t(=)=t(\text{if})=1 \; ; \; t(+)=t(-)=2 \; ;$$
$$t(*)=3 \; ; \; t(/)=4 \; ; \; t(C)=6 \; .$$

$(\vartheta_x)_{x \in \mathbb{R}}$ sei wie in früheren Beispielen das System der $\{x\}$-Expansionen von $\mathbb{R}$. (B_x) sei ein Mengensystem , wobei

$B_x := \{\alpha^x_{if}\vec{a}_x\}$ gelte mit

$$\alpha^x_{if}\vec{a}_x := \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} & \text{falls } x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\} \\ c_x & \text{falls } x=1 \text{ oder } x=-1 \end{cases}$$

Es handelt sich also, ähnlich wie in Beispiel 4.4 , um die Auswertung einer rationalen Funktion an verschiedenen Punkten $x \in \mathbb{R}$ mit Fehlerausgang, falls der Nenner verschwindet. (B_x) ist berechenbar und wird optimal berechnet von $M := \{ifw_1w_2w_3\}$ mit w_1 = C , w_2 = /1-*XX1 und w_3 = =0-*XX1 .

M ist eine Berechnung mit einer Verzweigung : es wird nach der Abfrage "x^2-1 = 0 ?" nach c_x oder $\frac{1}{x^2-1}$ verzweigt für jede $\triangle^*$-Palgebra $\mathfrak{A}_x$. Es ist

$$L^*(M) = t(if) + \max\{L^*(\{w_1,w_3\}),L^*(\{w_2,w_3\})\}$$
$$= t(if) + t(=) + t(-) + t(*) + t(C) = 13$$

Will man Verallgemeinerungen der Sätze 3.11,3.12 und der Simulationssätze 3.17,3.18 für Systeme von Palgebren herleiten, so benötigt man verallgemeinerte Aussagen der Form (3.11.1). Wir zeigen, daß dies nicht möglich ist: Dazu sei

$$V_k(\alpha^x_{if}\vec{a}_x) := \begin{cases} f_{\mathfrak{A}_x}(V_k(ifw_1w_2w_3)) & \text{falls definiert} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann sind die Systeme $(V_k(\alpha^x_{if}\vec{a}_x))_{x\in\mathbb{R}}$ berechenbar für k=1,2 und es gilt

$L^*((V_1(\alpha^x_{if}\vec{a}_x)))=L^*(\{C,=1X,=-01X\})=t(C)+t(=)+t(=)+t(-)$ = 10

$L^*((V_2(\alpha^x_{if}\vec{a}_x)))=L^*(\{w_2,w_3\})$ = $t(*)+t(-)+t(=)+t(/)$ = 10

Damit erhält man

$$t(if) + \max_{k=1,2} L^*((V_k(\alpha_{if}^x \vec{a}_x))) = 1 + 10 = 11$$

Andererseits war $L^*((\alpha_{if}^x \vec{a}_x)) = 13$. Eine zu (3.11.1) analoge Form für Mengensysteme ist also nicht zu zeigen. Das hängt wieder mit den zu Beispiel 4.8 angestellten Überlegungen zusammen .

5. Zusammenhang zwischen Berechnungen mit und ohne Verzweigungen

Um die Rechenzeiten für die Berechnung mit und ohne Verzweigungen von Mengensystemen vergleichen zu können, werden Palgebren mit gleichen Trägermengensystemen und mit gleichen arithmetischen Operationen betrachtet, in denen Verzweigungsoperationen einmal vorhanden und zum anderen nicht vorhanden sind. In Satz 5.2 wird für eine Berechnung mit Verzweigungen, die ein Mengensystem (B_j) berechnet, und für einen festen Index $j \in J$ eine Berechnung ohne Verzweigungen konstruiert, die B_j berechnet. Die Konstruktion geschieht in der Weise, daß für Teilworte, die mit einem Selektor beginnen, etwa $\sigma w = \sigma w_1..w_s$, gerade das $w_i \in \mathrm{Im}\, w$ ersetzt wird, das zur Berechnung von B_j benötigt wird, für das also gilt : $f_{\alpha_j}(\sigma w_1..w_s) = f_{\alpha_j}(w_i)$.
In Satz 5.4 wird eine Berechnung ohne Verzweigungen konstruktiv angegeben, die alle B_j mit $j \in J$ berechnet. Dabei werden beim Auftreten eines Wortes $\sigma w_1..w_s$ mit $\sigma \in \Omega_\gamma$ alle Wortkombinationen gebildet, die entstehen, wenn $w_1,..,w_{s-1}$ für $\sigma w_1..w_s$ eingesetzt werden. Gehört $\omega w_1..w_s$ zur Berechnung mit Verzweigungen ($\omega \in \Omega_a$) und beginnt jedes w_i mit einem Selektor und wählt ein Element aus k Elementen aus und ist $\tau(\omega w_1..w_s) = 2$, dann müssen für $\omega w_1..w_s$ bereits k^s Worte ohne Selektoren eingesetzt werden.
Daher sind die Abschätzungen für die Länge der entstehenden Berechnung ohne Verzweigungen sehr grob und haben nur theoretischen Charakter.

Definition 5.1

Sei $\triangle^*=(\Omega,I,q,z)$ ein Typ mit Verzweigungen.

$\triangle := (\Omega\setminus\Omega_\gamma, I, q|\Omega\setminus\Omega_\gamma, z|\Omega\setminus\Omega_\gamma)$ heißt zu $\triangle^*$ gehörender Typ ohne Verzweigungen.

Ist $W(\triangle^*)$ die $\triangle^*$-Wortalgebra und $\triangle$ der zu $\triangle^*$ gehörende Typ ohne Verzweigungen, so heißt die $\triangle$-Wortalgebra $W(\triangle)$ die zu $W(\triangle^*)$ gehörende Wortalgebra ohne Verzweigungen. Ist $\mathfrak{A}$ eine $\triangle^*$-Palgebra, so heißt die $\triangle$-Palgebra, die durch Streichen aller Operationen α_σ $(\sigma\in\Omega_\gamma)$ aus $\mathfrak{A}$ entsteht, die zu $\mathfrak{A}$ gehörende $\triangle$-Palgebra ohne Verzweigungen.

Satz 5.2

Sei $(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ ein System von $\triangle^*$-Palgebren mit Verzweigungen, t sei eine Operationszeit für $\triangle^*$ mit $t(\omega)>0$ für $s(\omega)>0$. $(B_j)_{j\in J}$ sei ein berechenbares Mengensystem mit $L^*((B_j))=m$. Dann existiert für jedes $j\in J$ eine Berechnung β_j ohne Verzweigungen, die B_j in der zu $\mathfrak{A}_j$ gehörenden $\triangle$-Palgebra ohne Verzweigungen berechnet mit $L(\beta_j)\leq m$.

Beweis: Wir zeigen: für jedes $M\in\mathcal{E}(W^*)$, das B_j mit festem j berechnet, gilt : es gibt eine Berechnung β_j ohne Verzweigungen, die B_j berechnet mit $L(\beta_j)\leq L^*(M)$.

Algorithmus zur Konstruktion von β_j aus M :

$M_o := M$ (0-ter Schritt)

M_k wird aus M_{k-1} konstruiert (k-ter Schritt) :

Sei $\omega w_1..w_s \in M_{k-1}$. Ist $f_{\vartheta_j}(\omega w_1..w_s)$ nicht definiert, so wird $\omega w_1..w_s$ gestrichen und gehört nicht zu M_k .

$f_{\vartheta_j}(\omega w_1..w_s)$ sei definiert .

(a) Sei $\omega \in \Omega_\gamma$.

Dann existiert ein $i \in \{1,..,\mu(\omega)\}$ mit $f_{\vartheta_j}(\omega w_1..w_s) = f_{\vartheta_j}(w_i)$. Dieses w_i wird für $\omega w_1..w_s$ zu M_k gefügt.

(b) Sei $\omega \in \Omega_a$.

Füge $\omega \bar{w}_1..\bar{w}_s, \bar{w}_1, \bar{w}_2, .., \bar{w}_s$ zu M_k hinzu, wobei für $1 \leq i \leq s$

$$\bar{w}_i := \begin{cases} w_{ij} & \text{falls } w_i \text{ entweder beim k-ten Schritt unter(a)} \\ & \text{oder beim (k-1)-ten Schritt unter (b) durch} \\ & w_{ij} \text{ ersetzt wurde} \\ w_i & \text{sonst} \end{cases}$$

Bei diesem Algorithmus können während $\tau(M)$ Schritten neue Vorgänger hinzukommen. Während weiterer $\tau(M)$ Schritte können danach noch Worte nach (b) geändert werden. Ein Beispiel für den Algorithmus wird im Anschluß an diesen Beweis gegeben. Es ist $\tau(M) < \infty$ wegen $t(\omega) > 0$ für $s(\omega) > 0$ und $L^*(M) < \infty$ .Daher bricht der Algorithmus nach $n \leq 2 \cdot \tau(M)$ Schritten mit M_n ab. Nach Konstruktion ist M_n eine $\triangle$-Menge; nach (a) und (b) berechnet jedes M_k in ϑ_j die gleiche Menge wie M_{k-1} . Induktiv folgt : M_n berechnet B_j in ϑ_j . Ebenso folgt aus (a) und (b) : $L^*(M_k) \leq L^*(M_{k-1})$ und induktiv damit $L^*(M_n) \leq L^*(M)$. Da M_n keine Worte mit Selektoren mehr enthält, gilt $L^*(M_n) = L(M_n)$, wobei L die Länge in der zugehörenden Wortalgebra ohne Verzweigungen gemäß Definition 1.7 ist. Die $\triangle$-Menge M_n ist dann die gesuchte Berechnung β_j ohne Verzweigungen.

ged.

Beispiel für den Algorithmus zu Satz 5.2

Sei $M = \{\omega uv\}$ mit $u = \omega_1 u_1 u_2$, $u_1 = \sigma w_1 w_2 w_3$ und $\omega, \omega_1 \in \Omega_a$, $\sigma \in \Omega_\gamma$. v, u_2, w_1, w_2, w_3 seien nullstellig erzeugt und es gelte $f_{\mathfrak{A}_j}(\sigma w_1 w_2 w_3) = f_{\mathfrak{A}_j}(w_1)$.

Dann erhält man

$M_0 = \{\omega uv\}$

$M_1 = \{\omega uv, u, v\}$

$M_2 = \{\omega uv, u, v, u_1, u_2\}$

$M_3 = \{\omega uv, \omega_1 w_1 u_2, v, w_1, u_2\}$

$M_4 = \{\omega\omega_1 w_1 u_2 v, \omega_1 w_1 u_2, v, w_1, u_2\}$

Korollar 5.3

Für nur eine Δ^*-Palgebra $\mathfrak{A}$ gilt $L^* = L$, wobei L die Länge in der zugehörenden Δ-Palgebra ohne Verzweigungen gemäß Definition 1.8 angibt.

Beweis: Offensichtlich ist L^* eine "L-Schranke" für $\mathfrak{A}$, das heißt $L^*(A \cup \{\alpha_\omega \vec{a}\}) \leq t(\omega) + L^*(A \cup \mathrm{Im}\, \vec{a})$ .Mit Strassen [18] ,Satz 4.2, folgt dann $L^* \leq L$. Andererseits gilt nach Satz 5.2 auch $L \leq L^*$.

qed.

Satz 5.4

Sei $(\mathfrak{A}_j)_{j \in J}$ ein System von Δ^*-Palgebren mit Verzweigungen, (B_j) sei ein berechenbares Mengensystem mit $L^*((B_j)) = m$ unter $t(\omega)=1$ für $s(\omega) > 0$ und $t(\omega)=0$ für $s(\omega)=0$; $u := \max_{\omega} s(\omega)$ existiere. Dann gibt es eine Berechnung $\mathfrak{Z}$ ohne Verzweigungen,

die jede Menge B_j in der zugehörenden Δ-Palgebra ohne Verzweigungen berechnet und für die gilt

$$L(\beta) \leq m \cdot (u-1)^{u^{m-1}} \cdot (u+1)^m$$

Beweis: $M \in \mathcal{E}(W^*)$ berechne (B_j) mit $L^*(M) = m$. Ein Wort $w' \in W^*$ heiße Vorgänger von $w \in W^*$, wenn es eine Folge $w = w_0, w_1, .., w_n = w'$ gibt, so daß $w_k \in \text{Im } w_{k-1}$ für $k=1,..,n$.

Behauptung (I): Die Anzahl der Worte, die man für ein Wort $\omega w \in M$ mit $\tau(\omega w) \geq 1$ erhält, wenn man für jeden Vorgänger $\sigma w_1 .. w_s$ von ωw, der mit einem Selektor σ beginnt, die Worte $w_1, w_2, .., w_{s-1}$ einsetzt und damit alle möglichen Kombinationen bildet, ist durch $(u-1)^{u^{\tau(\omega w)-1}}$ beschränkt.

Beweis durch Induktion über $\tau(\omega w)$:

Sei $\tau(\omega w)=1$,dann gibt es keine Vorgänger mit positiver Stellenzahl und ωw wird durch höchstens u-1 Worte ersetzt, falls $\omega \in \Omega_\gamma$. (I) ist dann wegen $(u-1) = (u-1)^{u^0}$ erfüllt. Für alle $w' \in W^*$ mit $1 \leq \tau(w') \leq n-1$ sei die Behauptung gezeigt und es sei $\tau(\omega w_1 .. w_s) = n$. Jedes w_i kann nach Induktionsvoraussetzung durch maximal $(u-1)^{u^{\tau(w_i)-1}}$ Worte ersetzt werden. Da man für $\omega w_1 w_2 .. w_s$ im ungünstigen Fall $\omega \in \Omega_a$ alle Kombinationen dieser Worte bilden muß, kann man maximal

$$\prod_{i=1}^{s} (u-1)^{u^{\tau(w_i)-1}}$$ Kombinationen bilden. Es gilt

$$\prod_{i=1}^{s} (u-1)^{u^{\tau(w_i)-1}} \leq \prod_{i=1}^{s} (u-1)^{u^{\tau(\omega w)-2}}$$

$\leq \left[(u-1)^{u^{\tau(\omega w)-2}}\right] u = (u-1)^{u^{\tau(\omega w)-1}}$,womit (I) gezeigt ist.

Behauptung (II): Für Mengen $M \in \mathcal{E}(W)$ und ihre $\triangle$-Hüllen $\widetilde{M}$ gilt $\#\widetilde{M} \leq \#M \cdot (u+1)^{\tau(M)}$.

Beweis durch Induktion über $\tau(M)$:

Für $\tau(M)=0$ haben M und $\widetilde{M}$ gleich viele Elemente.

Ist $\tau(M)=1$, so können für alle $\omega w \in M$ maximal u Vorgänger bei der Bildung von $\widetilde{M}$ hinzukommen,woraus folgt :

$$\#\widetilde{M} \leq u \cdot \#M + \#M = (u+1) \cdot \#M$$

Für alle M' mit $\tau(M') \leq n-1$ sei die Behauptung bewiesen und es sei $\tau(M)=n$. Dann gilt für $\omega w_1 .. w_s \in M$:

$\#\{\widetilde{w_i}\} \leq (u+1)^{\tau(w_i)}$ nach Induktionsvoraussetzung und

$$\#\{\widetilde{\omega w}\} \leq 1 + \sum_{i=1}^{s} \#\{\widetilde{w_i}\} \leq 1 + u \cdot (u+1)^{\max_i \tau(w_i)}$$

$$\leq (u+1)^{\max_i \tau(w_i)+1} = (u+1)^{\tau(\omega w)}$$

Damit folgt $\#\widetilde{M} \leq \sum_{\omega w \in M} \#\{\widetilde{\omega w}\} \leq \#M \cdot (u+1)^{\tau(M)}$,

was zu zeigen war.

Für eine Wortmenge $M \in \mathcal{E}(W^*)$ sei M_o die Menge der nullstelligen Symbole aus M : $M_o := \{m \in M : s(m)=0\}$.

Sei M die Wortmenge, die (B_j) berechnet mit $L^*(M)=m$ .Für jedes $\omega w \in M$ bilden wir gemäß Behauptung (I) alle Wortkombinationen ohne Selektoren und erhalten so die Wortmenge $\overline{M} \in \mathcal{E}(W)$. Da für nullstellige $w \in M$ keine neuen Worte ersetzt werden, gilt mit Behauptung (I) :

(1) $\#(\overline{M} \setminus \overline{M}_o) \leq \#(M \setminus M_o) \cdot (u-1)^{u^{\tau(M)-1}}$

Da τ (3.11.1) erfüllt, gilt $\tau(M) \leq L^*(M)$, das heißt $\tau(M)$ kann durch m abgeschätzt werden. Ferner folgt aus Definition 2.7 , daß $\#\#(M \setminus M_o) \leq L^*(M)$ gilt, also ebenfalls durch m abzuschätzen ist, und es gilt

(2) $\#\#(\overline{M} \setminus \overline{M}_o) \leq m \cdot (u-1)^{u^{m-1}}$

Zu $\overline{M}$ bilden wir die $\triangle$-Hülle $\widetilde{\overline{M}}$, für die mit Behauptung (II) gilt :

(3) $\#\#(\widetilde{\overline{M}} \setminus \widetilde{\overline{M}}_o) \leq \#\#(\overline{M} \setminus \overline{M}_o) \cdot (u+1)^{\tau(\overline{M})} \leq m \cdot (u-1)^{u^{m-1}} \cdot (u+1)^m$

wegen $t(\omega)=1$ für $s(\omega)>0$ steht links gerade die Länge $L(\widetilde{\overline{M}})$. $\widetilde{\overline{M}}$ ist die gesuchte Berechnung ohne Verzweigungen ; sie berechnet nach obiger Konstruktion alle B_j in der zu $\mathcal{A}_j$ gehörenden $\triangle$-Palgebra ohne Verzweigungen.

qed.

Satz 5.5

Sei $(\mathcal{A}_j)_{j \in J}$ ein System von $\triangle^*$-Palgebren mit Verzweigungen, t sei eine Operationszeit mit : $t_{min} := \min\limits_{\substack{\omega \in \Omega \\ s(\omega)>0}} t(\omega)$ und

$t_{max} := \max\limits_{\omega \in \Omega} t(\omega)$ existieren mit $0 < t_{min} \leq t_{max} < \infty$.
(B_j) sei berechenbar mit $L^*((B_j)) = m > 0$.

Dann existiert eine Berechnung β ohne Verzweigungen, die alle B_j berechnet mit

$$L(\beta) \leq \frac{t_{max}}{t_{min}} \; m \cdot (u-1)^{u^{\frac{m}{t_{min}}-1}} \cdot (u+1)^{\frac{m}{t_{min}}}$$

Beweis: M berechne (B_j) mit $L^*(M)=m$, dann ist die Anzahl der nicht nullstelligen $w \in M$ abzuschätzen durch

(i) $\#(M \setminus M_o) \leq \frac{m}{t_{min}}$

Die $\triangle$-Menge $\widetilde{\bar{M}}$ sei wie im Beweis zu Satz 5.4 konstruiert, dann gilt hier

(ii) $L(\widetilde{\bar{M}}) \leq \#(\widetilde{\bar{M}} \setminus \widetilde{\bar{M}}_o) \cdot t_{max}$

Damit geht (3) aus Satz 5.4 hier über in

$$\begin{aligned}
\text{(iii)}\quad \#(\widetilde{\bar{M}} \setminus \widetilde{\bar{M}}_o) \cdot t_{max} &\leq t_{max} \#(\bar{M} \setminus \bar{M}_o) \cdot (u+1)^{\tau(\bar{M})} \\
&\leq t_{max} \#(M \setminus M_o) \cdot (u-1)^{u^{\tau(M)-1}} \cdot (u+1)^{\tau(\bar{M})} \\
&\leq \frac{t_{max}}{t_{min}} \cdot m \cdot (u-1)^{u^{\tau(M)-1}} \cdot (u+1)^{\tau(\bar{M})}
\end{aligned}$$

Für $N \in \mathcal{E}(W^*)$ sei $\lambda(N) := \tau(N) \cdot t_{min}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lambda(M \cup \{\omega w\}) &= \tau(M \cup \{\omega w\}) \cdot t_{min} \\
&\overset{(*)}{\leq} \{1 + \max_k \tau(M \cup V_k(\omega w))\} \cdot t_{min} \\
&= t_{min} + \max_k \{\tau(M \cup V_k(\omega w)) \cdot t_{min}\} \\
&\leq t(\omega) + \max_k \lambda(M \cup V_k(\omega w))
\end{aligned}$$

(*) Die Tiefe τ erfüllt (3.11.1)

Aus der Abschätzung folgt, daß λ (3.11.1) erfüllt ,woraus man mit Satz 3.11 erhält : $\lambda \leq L^*$.

Damit folgt nun $\tau(M) \cdot t_{min} \leq L^*(M) = m$ und $\tau(M) \leq \frac{m}{t_{min}}$.

Eingesetzt in (iii) erhält man mit (ii) die Behauptung.

ged.

6. Irreduzible Mengen von Palgebren

In diesem Kapitel werden beliebige Mengen von Palgebren eines festen Typs mit zwei Topologien versehen. Unter der Voraussetzung der Irreduzibilität dieser Topologien kann dann im nächsten Kapitel die Aussage hergeleitet werden, daß mit Berechnungen ohne Verzweigungen bis auf eine im Sinne dieser Topologien dünne Menge alle Mengensysteme berechnet werden können, die berechenbar sind gemäß Definition 4.2. Diese Berechnungen ohne Verzweigungen beanspruchen dann höchstens die Rechenzeit der entsprechenden Berechnungen mit Verzweigungen.

Sei Δ^* ein Typ mit Verzweigungen ; $\mathfrak{B}$ sei eine Menge von Palgebren. $\mathfrak{B}$ kann hier beliebig sein, im allgemeinen genügt es jedoch, sich auf Systeme $(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ zu beschränken. $W(\Delta^*)$ sei die Δ^*-Wortalgebra. $\Omega_v \subset \Omega$ seien die Symbole, deren zugehörige Operationen Wahrheitswerte oder andere Entscheidungswerte liefern, die ausschließlich im Definitionsbereich von Verzweigungsoperationen liegen und zur Entscheidung dienen, in welche Richtung verzweigt wird, zum Beispiel Vergleichssymbole. Diese Symbole Ω_v nehmen wir bei der Bildung der zu $W(\Delta^*)$ gehörenden Wortalgebra ohne Verzweigungen $W(\Delta)$ heraus , also

$$\Delta=(\Omega\setminus(\Omega_\gamma\cup\Omega_v),I,q|\Omega\setminus(\Omega_\gamma\cup\Omega_v),z|\Omega\setminus(\Omega_\gamma\cup\Omega_v)) \quad .$$

Dieses bedeutet keine Einschränkung für $W(\Delta)$, da Symbole aus Ω_v in Berechnungen ohne Verzweigungen ohnehin nicht auftreten , da sie aber die einzuführende Topologie $\mathcal{T}^*$ auf $\mathfrak{B}$ entscheidend ändern würden (vergleiche Beispiel 7.5).

Für $w \in W^*$ sei $w_{\mathfrak{B}}$ eine partielle Funktion auf $\mathfrak{B}$, die jedem $\mathfrak{A} \in \mathrm{Def}\, w_{\mathfrak{B}}$ ein Element aus der Vereinigung $A_{\mathfrak{A}}$ der Trägermengen von $\mathfrak{A}$ zuordnet :

$$w_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{B} \longrightarrow \bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{B}} A_{\mathfrak{A}}$$

ist erklärt durch $w_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) := f_{\mathfrak{A}}(w)$, falls definiert, sonst ist $w_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ nicht erklärt.

Die partiellen Funktionen $w_{\mathfrak{B}}$ heißen Wortfunktionen auf $\mathfrak{B}$.

Zur Unterscheidung zwischen Operationen in verschiedenen Palgebren benutzen wir die Schreibweise $\omega_{\mathfrak{A}}$ für α_ω, wenn α_ω die ω zugeordnete Operation in $\mathfrak{A}$ ist. Damit definieren wir auf der Menge der Wortfunktionen auf $\mathfrak{B}$ eine algebraische Struktur :

Für $i \in I$ seien $W^i(\mathfrak{B}) := \{ w_{\mathfrak{B}} : w \in W^i(\Delta^*) \}$.

Ist $w_1 .. w_s \in W^{q(\omega)}(\Delta^*)$, so sei für $\langle w_{\mathfrak{B}}^1, .., w_{\mathfrak{B}}^s \rangle \in W^{q(\omega)}(\mathfrak{B})$ erklärt :

$$\omega_{W(\mathfrak{B})}(w_{\mathfrak{B}}^1, .., w_{\mathfrak{B}}^s) := (\omega w_1 .. w_s)_{\mathfrak{B}} \quad .$$

Dann ist $W(\mathfrak{B}) := (\{ W^i(\mathfrak{B}) : i \in I \}, \{ \omega_{W(\mathfrak{B})} : \omega \in \Omega \})$ eine Algebra vom Typ Δ^* (im Sinne von Definition 1.2).

Sie heißt die Algebra der Wortfunktionen auf $\mathfrak{B}$.

Zu beachten ist, daß jedem $w \in W^*$ eine partielle Funktion $w_{\mathfrak{B}}$ zugeordnet ist, also gehört $w_{\mathfrak{B}}$ auch zu $W(\mathfrak{B})$, wenn $\mathrm{Def}\, w_{\mathfrak{B}}$ leer ist. Für verschiedene Worte $w, w' \in W^*$ können die Wortfunktionen $w_{\mathfrak{B}}, w'_{\mathfrak{B}}$ gleich sein : mit $w := X$ und $w' := +-XYY$ stimmen $w_{\mathfrak{B}}$ und $w'_{\mathfrak{B}}$ auf der Menge der $\{x\}$-Expansionen von $\mathbb{R}$ überein.

Für $w, w' \in W^*$ wird erklärt :

$$\{ w_{\mathfrak{B}} \neq w'_{\mathfrak{B}} \} := \{ \mathfrak{A} \in \mathrm{Def}\, w_{\mathfrak{B}} \cap \mathrm{Def}\, w'_{\mathfrak{B}} : w_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) \neq w'_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) \}$$

Die Mengen $\{ w_{\mathfrak{B}} \neq w'_{\mathfrak{B}} \}$ und die Definitionsbereiche $\mathrm{Def}\, w_{\mathfrak{B}}$ werden für alle $w, w' \in W$ zu einer Subbasis $\mathcal{S}$ einer Topologie

auf $\mathfrak{B}$ zusammengefaßt, die wir mit γ bezeichnen. γ ist die Zariski-Topologie auf $\mathfrak{B}$ (Mumford [12], Strassen [19]). Über Selektoren $\sigma \in \Omega_\gamma$ und Worte $\sigma w_1..w_s$ wird eine weitere Topologie γ^* auf $\mathfrak{B}$ eingeführt :
Die Mengen $\{(\sigma w_1..w_s)_{\mathfrak{B}} \neq (w_i)_{\mathfrak{B}}\}$ für $\sigma \in \Omega_\gamma$ und $1 \leq i \leq \mu(\sigma)$ bilden zusammen mit den Mengen aus $\mathcal{S}$ eine Subbasis $\mathcal{S}^*$, die zugehörige Topologie sei γ^*. Daraus ergibt sich sofort:

Korollar 6.1

Sei $\mathfrak{B}$ eine Menge von Δ^*-Palgebren ; γ und γ^* seien die oben konstruierten Topologien auf $\mathfrak{B}$. Dann ist γ^* feiner als γ.

Satz 6.2

Sei $\mathfrak{B}$ eine Menge von Δ^*-Palgebren ; $W(\mathfrak{B})$ sei die Algebra der Wortfunktionen auf $\mathfrak{B}$. Dann gilt :

(i) $f_{W(\mathfrak{B})}(w) = w_{\mathfrak{B}}$

(ii) $W(\mathfrak{B})$ ist prim

(iii) Seien $\sigma \in \Omega_\gamma$, $\langle w^1_{\mathfrak{B}},..,w^s_{\mathfrak{B}} \rangle \in W^{q(\sigma)}(\mathfrak{B})$. Dann gibt es für jede Palgebra $\mathfrak{A} \in \mathrm{Def}\,(\sigma w^1..w^s)_{\mathfrak{B}}$ einen Index $i \in \{1,..,\mu(\sigma)\}$ mit $(\sigma w^1..w^s)_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) = w^i_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$.

Beweis: Da Δ^* Definition 1.2 erfüllt, schließt man mit Strassen [19], Satz 7.3 : $f_{W(\mathfrak{B})} : W(\Delta^*) \longrightarrow W(\mathfrak{B})$ ist minimale und einzige strenge Spezialisierung. Da die Zuordnung $w \longrightarrow w_{\mathfrak{B}}$ sogar ein strenger Homomorphismus ist, stimmt sie mit $f_{W(\mathfrak{B})}$ überein, also gilt (i).

Da $f_{W(\mathcal{B})}$ surjektiv ist, folgt ebenfalls mit Strassen [19]: $W(\mathcal{B})$ ist prim.

Für $\mathcal{A} \in \mathrm{Def}\ (\sigma w^1..w^s)_{\mathcal{B}}$ gilt :

$$\begin{aligned}(\sigma w^1..w^s)_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) &= f_{\alpha}(\sigma w^1..w^s)\\ &= f_{\widetilde{\mathcal{A}}}(\sigma w^1..w^s)\\ &= \widetilde{\alpha}_\sigma(f_{\widetilde{\mathcal{A}}}(w^1),..,f_{\widetilde{\mathcal{A}}}(w^s))\\ &= \alpha_\sigma(f_{\widetilde{\mathcal{A}}}(w^1),..,f_{\alpha}(w^s))\\ &= f_{\widetilde{\mathcal{A}}}(w^i) = f_{\alpha}(w^i) \text{ für ein } i\in\{1,..,\mu(\sigma)\}\ ,\end{aligned}$$

da $\mathcal{A}$ eine Δ^*-Palgebra mit Verzweigungen ist. Dann ist $\mathcal{A} \in \mathrm{Def}\ w^i_{\mathcal{B}}$ und $f_{\mathcal{A}}(w^i) = w^i_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$.

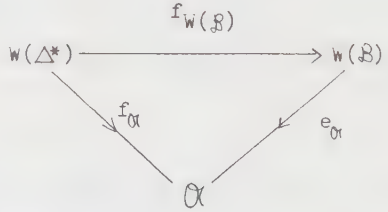
qed.

Satz 6.3

Sei $\mathcal{B}$ eine Menge von Δ^*-Palgebren und $W(\mathcal{B})$ die Algebra der Wortfunktionen auf $\mathcal{B}$. Dann gilt :

(i) Die Auswertungsabbildung $e_{\mathcal{A}} : W(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{A}$, erklärt durch $e_{\mathcal{A}}(w_{\mathcal{B}}) := w_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$, falls $\mathcal{A} \in \mathrm{Def}\ w_{\mathcal{B}}$, ist eine Spezialisierung.

(ii) Für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ ist das Diagramm

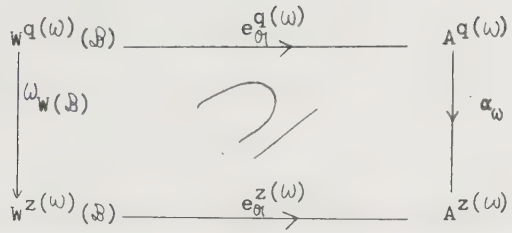


kommutativ.

Beweis: (i) Sei $e_{\mathcal{A}} := \{e^i : i\in I\}$ gegeben mit

$$e^i_{\mathcal{A}} : W^i(\mathcal{B}) \longrightarrow A^i\ .$$

Zu zeigen ist :



Für $w_{\mathcal{B}}^1,..,w_{\mathcal{B}}^s$, α_ω sei der obere Weg definiert ; dann ist $f_{\vartheta_1}(w^i)$ erklärt für alle $1 \leq i \leq s$ und es folgt

$$\begin{aligned}\alpha_\omega(e^{q(\omega)}{}_1(w_{\mathcal{B}}^1),..,e^{q(\omega)}{}_s(w_{\mathcal{B}}^s)) &= \alpha_\omega(f_{\vartheta_1}(w^1),..,f_{\vartheta_1}(w^s)) \\ &= f_{\vartheta_1}(\omega w^1..w^s) \\ &= e_{\vartheta_1}^{z(\omega)}(\,(\omega w^1..w^s)_{\mathcal{B}}\,) \\ &= e_{\vartheta_1}^{z(\omega)}(\omega_{W(\mathcal{B})}(w_{\mathcal{B}}^1,..,w_{\mathcal{B}}^s))\end{aligned}$$

(ii) $f_{\vartheta_1}(w)$ ist genau dann erklärt, wenn $e_{\vartheta_1}(w_{\mathcal{B}})$ erklärt ist; in diesem Fall gilt $f_{\vartheta_1}(w) = e_{\vartheta_1}(w_{\mathcal{B}}) = e_{\vartheta_1}(f_{W(\mathcal{B})}(w))$.

qed.

Definition / Satz 6.4

Ein topologischer Raum X heißt irreduzibel, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind :

(6.4.1) Der Durchschnitt zweier nichtleerer offener Mengen ist nicht leer.

(6.4.2) Jede nichtleere offene Menge liegt dicht in X.

(6.4.3) X ist nicht die Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen.

Unter einer irreduziblen Menge von Δ^*-Palgebren mit Verzweigungen sei stets ihre Irreduzibilität unter der Topologie

$\mathcal{T}^*$verstanden. Ist $\mathcal{T}^*$irreduzibel ,so ist auch $\mathcal{T}$ irreduzibel. Dies folgt sofort mit Korollar 6.1 und (6.4.1).
Ist $\mathcal{B}$ irreduzibel, so heißt eine Teilmenge von $\mathcal{B}$ dick , wenn sie eine nichtleere offene Menge enthält und dünn , wenn ihr Komplement dick ist. Gilt eine Aussage für alle $\mathcal{A}$ aus einer dicken Teilmenge von $\mathcal{B}$, so sagt man : die Aussage gilt fast überall . Ist $\mathcal{B}$ irreduzibel und sind alle $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ total, dann benötigt man keine Verzweigungen:

Satz 6.5

Sei $\mathcal{B}$ eine irreduzible Menge von Δ^*-Algebren mit Verzweigungen. Dann wird bei auftretenden Verzweigungsoperationen immer in die gleiche Richtung verzweigt.

Beweis: Analog zu $\{w_{\mathcal{B}} \neq w'_{\mathcal{B}}\}$ sei erklärt :

$$\{w_{\mathcal{B}} = w'_{\mathcal{B}}\} := \{\mathcal{A} \in \text{Def } w_{\mathcal{B}} \cap \text{Def } w'_{\mathcal{B}} : w_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = w'_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})\} .$$

Da alle $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ total sind, gilt für alle $\sigma w_1 .. w_s$, $w_i \in W^*$ mit $1 \leq i \leq \mu(\sigma)$:

$$\mathcal{B} = \{(\sigma w_1 .. w_s)_{\mathcal{B}} \neq (w_i)_{\mathcal{B}}\} \cup \{(\sigma w_1 .. w_s)_{\mathcal{B}} = (w_i)_{\mathcal{B}}\} .$$

Da diese Vereinigung disjunkt ist und $\{(\sigma w_1 .. w_s)_{\mathcal{B}} \neq (w_i)_{\mathcal{B}}\}$ offen ist bezüglich $\mathcal{T}^*$, gilt :

(*) Jedes $\{(\sigma w_1 .. w_s)_{\mathcal{B}} = (w_i)_{\mathcal{B}}\}$ ist dünn oder ganz $\mathcal{B}$.

Nach Satz 6.2 (iii) gilt

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\mu(\sigma)} \{(\sigma w_1 .. w_s)_{\mathcal{B}} = (w_i)_{\mathcal{B}}\}$$

Da $\mathcal{B}$ nicht die Vereinigung zweier dünner Mengen ist,

folgt induktiv : $\mathfrak{B}$ ist nicht die Vereinigung endlich vieler dünner Mengen. Also gibt es ein $i \in \{1,..,\mu(\sigma)\}$, so daß $\{(\sigma w_1..w_s)_{\mathfrak{B}} = (w_i)_{\mathfrak{B}}\}$ nicht dünn ist.

Mit (*) folgt für dieses i dann :

$\{(\sigma w_1..w_s)_{\mathfrak{B}} = (w_i)_{\mathfrak{B}}\} = \mathfrak{B}$

Daher gilt für alle $\mathfrak{A} \in \mathfrak{B}$

$f_{\mathfrak{A}}(\sigma w_1..w_s) = f_{\mathfrak{A}}(w_i)$, das heißt σ bewirkt eine Verzweigung immer in die gleiche Richtung.

qed.

Ist γ^* irreduzibel, so sind alle Mengen $\{(\sigma w^1..w^s)_{\mathfrak{B}} \neq w^i_{\mathfrak{B}}\}$ nach Voraussetzung offen. Mindestens eine dieser Mengen muß dann leer sein :

Satz 6.6

Sei $\mathfrak{B}$ eine irreduzible Menge von Δ^*-Palgebren. Dann gibt es für alle $\sigma \in \Omega_\gamma$ und $\langle w^1,..,w^s\rangle \in \mathrm{Def}\ \sigma$ einen Index $i \in \{1,..,\mu(\sigma)\}$ mit : $\{(\sigma w^1..w^s)_{\mathfrak{B}} \neq w^i_{\mathfrak{B}}\} = \emptyset$.

Beweis: Sei $\sigma w = \sigma w^1..w^s$ gegeben mit $\mathrm{Def}\ (\sigma w)_{\mathfrak{B}} \neq \emptyset$.

Annahme : Der Satz ist falsch. Dann sind für $1 \leq i \leq \mu(\sigma)$ die Mengen $\{(\sigma w^1..w^s)_{\mathfrak{B}} \neq w^i_{\mathfrak{B}}\}$ nicht leer.

Aus Satz 6.4.1 folgert man : $\bigcap_{i=1}^{\mu(\sigma)} \{(\sigma w)_{\mathfrak{B}} \neq w^i_{\mathfrak{B}}\} \neq \emptyset$.

Daher gibt es ein $\mathfrak{A} \in \mathfrak{B}$, das in diesem Durchschnitt liegt. Also gilt $(\sigma w)_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) \neq w^i_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ für $1 \leq i \leq \mu(\sigma)$, was ein Widerspruch zu Definition 2.2 ist.

qed.

Satz 6.7

Sei $\mathfrak{B}$ eine irreduzible Menge von Δ^*-Halgebren. Dann gilt $\forall \sigma \in \Omega_\gamma \; \forall \langle w^1,..,w^s \rangle \in \text{Def } \sigma$ mit $\text{Def } (\sigma w^1..w^s)_{\mathfrak{B}} \neq \emptyset$: Entweder ist $\text{Def } (\sigma w^1..w^s)_{\mathfrak{B}}$ dünn oder es gibt einen Index $i \in \{1,..,\mu(\sigma)\}$ so daß $(\sigma w^1..w^s)_{\mathfrak{B}}$ auf seinem Definitionsbereich bis auf eine dünne Menge mit $w^i_{\mathfrak{B}}$ übereinstimmt.

Beweis durch Induktion über $\tau(\sigma w^1..w^s)$:

Sei $\tau(\sigma w^1..w^s) = 1$ mit $\sigma w := \sigma w^1..w^s$; $\text{Def } (\sigma w)_{\mathfrak{B}}$ sei nicht dünn. Für $w^1,..,w^{\mu(\sigma)}$ sind $\text{Def } w^i_{\mathfrak{B}}$ offen wegen $w^i \in W$, $i=1,..,\mu(\sigma)$. Seien $w^{k_1},..,w^{k_r} \in \{w^1,..w^{\mu(\sigma)}\}$ alle Worte so daß $\{(\sigma w)_{\mathfrak{B}} = w^{k_i}_{\mathfrak{B}}\} \neq \emptyset$, also die Worte, in die tatsächlich verzweigt wird. Analog zu Satz 6.6 zeigt man : eine der Mengen $\{(\sigma w)_{\mathfrak{B}} \neq w^{k_i}_{\mathfrak{B}}\}$ ist leer. Dann gilt auf $\text{Def } (\sigma w)_{\mathfrak{B}} \cap \text{Def } w^{k_i}_{\mathfrak{B}}$: $(\sigma w)_{\mathfrak{B}}$ stimmt mit $w^{k_i}_{\mathfrak{B}}$ überein. $\text{Def } w^{k_i}_{\mathfrak{B}}$ ist offen und nicht leer, woraus für $\tau(\sigma w)=1$ die Behauptung folgt.

Für alle $\sigma' w'$ mit $\tau(\sigma' w') \leq n-1$ sei die Behauptung bewiesen und es gelte $\tau(\sigma w^1..w^s) = n$ mit $\sigma \in \Omega_\gamma$;dabei sei $\text{Def } (\sigma w)_{\mathfrak{B}}$ nicht dünn .

Eine endliche Vereinigung dünner Mengen ist dünn : Seien $U_1,..,U_n$ dünn, dann enthalten $\complement U_i$ für $i=1,..,n$ offene nichtleere Mengen. Also enthält $\bigcap_{i=1}^{n} \complement U_i = \complement \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ eine offene nichtleere Menge, folglich ist $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ dünn.

Da $\text{Def } (\sigma w)_{\mathfrak{B}} = \bigcup_{i=1}^{\mu(\sigma)} \{(\sigma w)_{\mathfrak{B}} = w^i_{\mathfrak{B}}\}$ nicht dünn ist, ist für ein $i \in \{1,..,\mu(\sigma)\}$ die Menge $\{(\sigma w)_{\mathfrak{B}} = w^i_{\mathfrak{B}}\}$ nicht dünn.

(a) w^i enthalte keinen Selektor.

Dann ist Def $w^i_{\mathfrak{B}}$ offen und nichtleer, woraus die Behauptung wie im Induktionsanfang folgt, da $\{(\sigma w)_{\mathfrak{B}} \neq w^i_{\mathfrak{B}}\}$ leer sein muß.

(b) w^i enthalte einen Selektor und habe die Darstellung

$$w^i = \bar{\omega}\,\bar{w}_1 .. \bar{w}_k .. \bar{w}_l \quad \text{mit } \bar{w}_k = \bar{\sigma} w_{k_1} .. w_{k_s} \;,\; \bar{\omega} \in \Omega_a,\ \bar{\sigma} \in \Omega_\gamma \;.$$

Nach Induktionsvoraussetzung stimmt $(\bar{w}_k)_{\mathfrak{B}}$ auf seinem (nicht dünnen) Definitionsbereich bis auf eine dünne Menge V mit einem $(w_{k_\iota})_{\mathfrak{B}}$ überein, $1 \leq k_\iota \leq k_s$. $\bar{w}_k$ ersetzen wir durch dieses w_{k_ι} :

$$\bar{w}^i := \bar{\omega}\,\bar{w}_1 .. \bar{w}_{k-1}\, w_{k_\iota} \bar{w}_{k+1} .. \bar{w}_l$$

$\bar{w}^i$ enthält keine Selektoren mehr, also ist Def $\bar{w}^i_{\mathfrak{B}}$ offen und, da Def $w^i_{\mathfrak{B}}$ nicht dünn ist, auch nicht leer. Es gilt :

(i) $w^i_{\mathfrak{B}}$ stimmt bis auf V auf seinem Definitionsbereich mit $\bar{w}^i_{\mathfrak{B}}$ überein.

(ii) Mit $\sigma\bar{w} := \sigma w^1 .. \bar{w}^i .. w^s$ stimmt $(\sigma w)_{\mathfrak{B}}$ bis auf V auf seinem Definitionsbereich mit $(\sigma\bar{w})_{\mathfrak{B}}$ überein.

Da $\{(\sigma w)_{\mathfrak{B}} = w^i_{\mathfrak{B}}\}$ nicht dünn war, ist auch $\{(\sigma\bar{w})_{\mathfrak{B}} = \bar{w}^i_{\mathfrak{B}}\}$ nicht dünn. Dann folgt für $(\sigma\bar{w})_{\mathfrak{B}}$ wie unter (a) die Behauptung des Satzes. Wegen (i) und (ii) gilt die Behauptung auch für $(\sigma w)_{\mathfrak{B}}$.

(c) Enthält w^i beliebig viele Selektoren, so entfernt man jeden Selektor wie unter (b) und erhält induktiv die Behauptung.

qed.

7. Hauptaussagen über Berechnungen mit Verzweigungen und Anwendungen

Es soll nun die bereits im 6.Kapitel angekündigte Aussage hergeleitet werden, daß Berechnungen mit Verzweigungen für eine irreduzible Menge von Δ^*-Palgebren bis auf eine dünne Menge keine Verringerung der Rechenzeit gegenüber Berechnungen ohne Verzweigungen mit sich bringen. Die Anregung zu dieser Aussage gab der Satz von Strassen ([19], Satz 8.4), der besagt, daß für fast alle Inputs (im Sinne von γ) die Verwendung eines Programms anstelle einer Berechnung (ohne Verzweigungen) keine Verringerung der Rechenzeit zur Folge hat. An die Stelle der Programme treten hier die nicht so umfassenden Berechnungen mit Verzweigungen, dafür brauchen einige Voraussetzungen von Strassen nicht gemacht zu werden: Die Menge Ω der Operationssymbole sowie das zu berechnende Mengensystem (b_j) können hier beliebig sein. Strassen beweist seinen Satz nur für Mengen von rationalen Funktionen (vergleiche Einleitung). Dies entspricht dem vorliegenden Satz 7.3, in Satz 7.4 wird die gleiche Aussage für beliebige Mengensysteme bewiesen. Ferner sind die Beweise zu den Sätzen 7.3 und 7.4 konstruktiv.

Im Folgenden wollen wir unter $\mathfrak{B}$ immer ein System von Δ^*-Palgebren mit Verzweigungen $(\mathcal{U}_j)_{j\in J}$ verstehen, welches irreduzibel ist unter der Topologie γ^*. $w(\Delta^*)$ sei die Δ^*-wortalgebra, $w(\mathfrak{B})$ die Algebra der wortfunktionen auf $\mathfrak{B}$.

[illegible] eine partielle Funktion auf [illegible], die jedem $\mathcal{U} \in$ Def v

ein $a \in A_{\mathfrak{A}}$ zuordnet . $M \in \mathcal{E}(W^*)$ berechnet v auf $\mathfrak{A}$, wenn gilt: Aus $\mathfrak{A} \in$ Def v folgt : $v(\mathfrak{A}) \in f_{\mathfrak{A}}(M)$.
M berechnet $\{v_1,..,v_l\}$ auf $\mathfrak{A}$, wenn M jedes v_s , $1 \leq s \leq l$, auf $\mathfrak{A}$ berechnet.

Lemma 7.2

Sei $M \in \mathcal{E}(W^*)$, $f_{W(\mathfrak{B})}(M) =: V \subset W(\mathfrak{B})$; Für $j \in J$ sei

$$B_j := \begin{cases} f_{\mathfrak{A}_j}(M) & \text{falls erklärt} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $\forall\, \mathfrak{A}_j \in \mathfrak{B}\ \forall\, M' \in \mathcal{E}(W^*)$:

M' berechnet B_j in $\mathfrak{A}_j$ $\Longleftrightarrow$ M' berechnet V auf $\mathfrak{A}_j$.

Beweis: a) M' berechne B_j in $\mathfrak{A}_j$. Ist $f_{\mathfrak{A}_j}(M)$ nicht definiert, so folgt : $\mathfrak{A}_j \notin$ Def $v_{\mathfrak{B}}$ für alle $v_{\mathfrak{B}} \in V$ wegen Definition 7.1 . Ist $f_{\mathfrak{A}_j}(M)$ erklärt, so gilt $f_{\mathfrak{A}_j}(M') \supset f_{\mathfrak{A}_j}(M)$. Mit Definition 7.1 folgt die Behauptung.
b) M' berechne V auf $\mathfrak{A}_j$. Sei $w \in M$ und $f_{\mathfrak{A}_j}(w)$ definiert (gibt es kein solches $w \in M$, so ist $B_j = \emptyset$ und jedes $M' \in \mathcal{E}(W^*)$ berechnet B_j in $\mathfrak{A}_j$ nach Definition 4.2) . Es gilt dann $f_{W(\mathfrak{B})}(w) =: v_{\mathfrak{B}} \in V$ und $\mathfrak{A}_j \in$ Def $v_{\mathfrak{B}}$ mit $v_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}_j) = f_{\mathfrak{A}_j}(w)$ nach Satz 6.3(ii). Da M' die Menge V auf $\mathfrak{A}_j$ berechnet, existiert ein $w' \in M'$ mit $v_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}_j) = f_{\mathfrak{A}_j}(w')$. Es folgt $f_{\mathfrak{A}_j}(w) = f_{\mathfrak{A}_j}(w')$, womit $f_{\mathfrak{A}_j}(M) \subset f_{\mathfrak{A}_j}(M')$ gezeigt ist. Daraus ergibt sich die Behauptung .

qed.

Die einfache Aussage 7.2 soll veranschaulichen, was es

bedeutet, wenn $M \subseteq \mathcal{P}(W^*)$ eine Menge von Wortfunktionen auf einer Menge von Palgebren berechnet : M berechne $V \subset W(\mathfrak{B})$ auf der offenen Menge $U \neq \emptyset$. M berechnet dann nach Lemma 7.2 ein Mengensystem, das für jede Palgebra "gleich strukturiert" ist, fast überall. Darunter fällt etwa die Auswertung eines Polynoms an verschiedenen Punkten, jede Palgebra entspricht dann einem Input.

Satz 7.3

Sei $\mathfrak{B}$ ein irreduzibles System von Δ^*-Palgebren mit Verzweigungen ; t sei eine Operationszeit mit $t(\omega) > 0$ für $s(\omega) > 0$; $W(\mathfrak{B})$ sei die Algebra der Wortfunktionen auf $\mathfrak{B}$, $V \subset W(\mathfrak{B})$ endlich. Dann gibt es eine Berechnung β ohne Verzweigungen, die V fast überall berechnet mit

$$L(\beta) \leq L^*(V \mid W(\mathfrak{B})) \ .$$

Beweis: Da $W(\mathfrak{B})$ prim ist (6.2(ii)),ist $L^*(V|W(\mathfrak{B})) < \infty$.
Sei $M \in \mathcal{P}(W^*)$ gegeben mit $L^*(M) = L^*(V|W(\mathfrak{B}))$, das V berechnet, wobei man $f_{W(\mathfrak{B})}(M) = V$ annehmen kann, da man anderenfalls zu $M' := M \cap f^{-1}_{W(\mathfrak{B})}(V)$ übergehen kann.

Ein Mengensystem (B_j) wird definiert durch

$$B_j := \begin{cases} f_{\beta_j}(M) & \text{falls erklärt} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $M_o := M$. Für $k \geq 1$ wird M_k aus M_{k-1} durch den folgenden Algorithmus gebildet :

Sei $\omega w_1 .. w_s \in M_{k-1}$. Ist $Def\,(\omega w_1 .. w_s)_{\mathfrak{B}} = \emptyset$, dann wird

$\omega w_1..w_s$ gestrichen und gehört nicht zu M_k .

Sei Def $(\omega w_1..w_s)_{\mathfrak{B}} \neq \emptyset$.

a) Sei $\omega \in \Omega_\gamma$

Dann gibt es nach Satz 6.7 einen Index $i \in \{1,..,\mu(\sigma)\}$ so daß $(\omega w_1..w_s)_{\mathfrak{B}}$ auf seinem Definitionsbereich bis auf eine dünne Menge mit $(w_i)_{\mathfrak{B}}$ übereinstimmt . $\omega w_1..w_s$ wird durch dieses w_i ersetzt.

b) Sei $\omega \in \Omega_a$

Füge $\omega \bar{w}_1..\bar{w}_s$, $\bar{w}_1, \bar{w}_2, .., \bar{w}_s$ zu M_k hinzu, wobei für $1 \leq i \leq s$

$$\bar{w}_i := \begin{cases} w_{ij} & \text{falls } w_i \text{ entweder beim k-ten Schritt unter a) oder beim (k-1)-ten Schritte unter b) durch } w_{ij} \text{ ersetzt wurde} \\ w_i & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Algorithmus entspricht der Konstruktion im Beweis zu Satz 5.2 und es gilt wie dort :

(1) Der Algorithmus bricht nach $n \leq 2^{\mathfrak{N}(M)} < \infty$ Schritten ab

(2) M_n enthält keine Verzweigungen mehr und ist $\triangle$-Menge

(3) $L(M_n) \leq L^*(M)$

Behauptung (I):

M_1 berechnet fast überall die von M_o berechneten Mengen.

Beweis: Sei $\omega w_1..w_s \in M_o$ und Def $(\omega w_1..w_s)_{\mathfrak{B}} \neq \emptyset$.
Ist $\omega \in \Omega_\gamma$, dann existiert nach a) ein $w \in M_1$ so daß $(\omega w_1..w_s)_{\mathfrak{B}}$ auf seinem Definitionsbereich bis auf eine

dünne Menge mit w_B übereinstimmt. $\{w\}$ berechnet damit fast überall die von $\{\omega w_1..w_s\}$ berechneten Mengen, insbesondere nach Definition der Berechenbarkeit auch dort, wo $(\omega w_1..w_s)_B$ nicht erklärt ist. Ist $\omega\in\Omega_a$, dann gehört $\omega\bar{w}_1..\bar{w}_s$ zu M_1 mit : entweder ist $\bar{w}_i=w_i$, in diesem Fall sei $U_i := \Omega$,oder die von $\{w_i\}$ berechneten Elemente werden auf der offenen Menge $U_i \neq \emptyset$ von $\{\bar{w}_i\}$ berechnet. Insgesamt folgt : $\{\omega\bar{w}_1..\bar{w}_s\}$ berechnet auf der offenen nichtleeren Menge $\bigcap_{i=1}^{s} U_i$ alle von $\{\omega w_1..w_s\}$ berechneten Elemente. Für alle $w\in M_o$ mit Def $w_B \neq \emptyset$ gibt es also ein $w'\in M_1$, so daß auf einer offenen nichtleeren Menge U_w $\{w'\}$ die von $\{w\}$ berechneten Elemente berechnet. Da M_o nur endlich viele Elemente hat, ist $U := \bigcap_{w\in M_o} U_w$ offen und nichtleer und M_1 berechnet auf U, also fast überall, die von M_o berechneten Mengen. (I)

Durch eine leichte Induktion zeigt man dann wie unter (I) : M_k berechnet fast überall die von M_o berechneten Mengen für $k\geq 1$, woraus folgt : M_n berechnet fast überall $(B_j)_{j\in J}$. Mit Lemma 7.2 folgt : M_n berechnet V fast überall. Mit (2) und (3) erhält man dann : M_n ist die gesuchte Berechnung ohne Verzweigungen mit $L(M_n) \leq L^*(V\, w(\cdot))$. qed.

Satz 7.4 (Hauptsatz über Berechnungen mit Verzweigungen)
Seien ein irreduzibles System $\mathfrak{B}=(\mathfrak{B}_j)_{j\in J}$ und eine Operationszeit t wie in Satz 7.3 gegeben; (B_j) sei ein berechenbares Mengensystem. Dann gibt es eine Berechnung β ohne Verzweigungen, die fast überall B_j in der zu $\mathfrak{B}_j$ gehörenden Σ-Algebra [illegible] Verzweigungen berechnet mit $L(\beta) \leq L^*$

Beweis: Sei $M = \{w_1,..,w_r\} \subset W^*$ Wortmenge, die (B_j) berechnet mit $L^*(M) = L^*((B_j))$. Dann sei

$$\overline{B}_j := \begin{cases} f_{\mathfrak{A}_j}(M) & \text{falls erklärt} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist für jedes $j \in J$ $\overline{B}_j \supset B_j$.

Mit $f_{W(\mathfrak{B})}(M) = \{(w_1)_{\mathfrak{B}},..,(w_r)_{\mathfrak{B}}\} =: V$ ist $L^*(M) \supseteq L^*(V|W(\mathfrak{B}))$.

Nach Satz 7.3 existiert eine Berechnung β ohne Verzweigungen, die V fast überall berechnet mit $L(\beta) \subseteq L^*(V|W(\mathfrak{B}))$.

Nach Lemma 7.2 berechnet β dann $\overline{B}_j$ fast überall , damit auch B_j fast überall, und es gilt

$$L(\beta) \subseteq L^*(V|W(\mathfrak{B})) \subseteq L^*(M) \; .$$ qed.

Als Anwendung für die in diesem Kapitel gegebenen Aussagen sollen 2 Beispiele dienen. Das erste entspricht dem bereits einige Male benutzten Beispiel des Systems $(\mathfrak{A}_x)_{x \in \mathbb{R}}$, wobei jedes $\mathfrak{A}_x$ auffaßbar ist als $\{x\}$-Expansion der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und man neben den üblichen arithmetischen Operationen eine Vergleichsoperation und eine Verzweigungsoperation hat. Die erzeugte Topologie τ^* ist irreduzibel und die Sätze 7.3 und 7.4 können angewendet werden. Für weitere Operationen auf $\mathbb{R}$ wird diskutiert, ob sie τ^* irreduzibel lassen.

Das zweite Beispiel behandelt ein System von Palgebren, in dem der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen berechnet werden kann. Die von den Wortfunktionen erzeugte Topologie stellt sich zwar als nicht irreduzibel heraus, dennoch gelten die Sätze 7.3 und 7.4 für die Berechnung des g.g.T. zweier Zahlen.

Beispiel 7.5

Sei $\triangle^*$ ein Typ mit Verzweigungen mit $\Omega_a = \{X, C, 0, 1, +, -, *, /, =\}$,

$\Omega_\gamma = \{if\}$, $I = \{1,2\}$,

$q(X) = q(C) = q(0) = q(1) = \varepsilon$

$q(+) = q(-) = q(*) = q(/) = q(=) = 11$

$q(if) = 12$

$z(=) = 2$, $z(\omega) = 1$ für $\omega \in \Omega \setminus \{=\}$.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ sei $\mathfrak{N}_x$ eine Palgebra mit Verzweigungen vom Typ $\triangle^*$:

$\mathfrak{N}_x = (\{A_x^i : i \in I\}, \{\alpha_\omega^x : \omega \in \Omega\})$ mit

$A_x^1 := \mathbb{R} \sqcup \{c_x\}$, $A_x^2 := \{WAHR, FALSCH\}$

$\alpha_x^x(\emptyset) = x$, $\alpha_c^x(\emptyset) = c_x$, $\alpha_0^x(\emptyset) = 0$, $\alpha_1^x(\emptyset) = 1$

nullstellige Operationen ;

α_+^x , α_*^x , $\alpha_/^x$, α_-^x übliche Verknüpfungen in $\mathbb{R}$.

$\alpha_=^x : A_x^1 \times A_x^1 \longrightarrow A_x^2$ erklärt für $(a_1, a_2) \in (A_x^1 \setminus \{c_x\})^2$.

Dann sei

$$\alpha_=^x(a_1, a_2) := \begin{cases} WAHR & \text{falls } a_1 = a_2 \\ FALSCH & \text{falls } a_1 \neq a_2 \end{cases}$$

Sei $(a_1, \widetilde{a_2}, a_3) \in Def\ \alpha_{if}^x$ genau dann, wenn $a_1 = c_x$,

$\widetilde{a_2} = \alpha_/^x(b_1, b_2)$ und $a_3 = \alpha_=^x(b_2, 0)$; in diesem Fall sei

$$\alpha_{if}^x(a_1, \widetilde{a_2}, a_3) := \begin{cases} a_1 & \text{falls } a_3 = WAHR \\ \widetilde{a_2} & \text{falls } a_3 = FALSCH \end{cases}$$

Lemma I

Jedes $\mathfrak{N}_x$ ist eine $\triangle^*$-Palgebra mit Verzweigungen .

Beweis: Zunächst erfüllt $\triangle^*$ Definition 2.1.
Sei $(a_1, \tilde{a}_2, a_3) \in$ Def α^x_{if} . Ist a_3 = WAHR , so wird a_1 angenommen ; ist a_3 = FALSCH , dann ist $b_2 \neq 0$ und $\tilde{a}_2 = a_2$.
Damit erfüllt α^x_{if} die Forderungen aus Definition 2.2.
qed.

Die Argumente von α^x_{if} können nicht beliebig sein, da sonst γ^* nicht irreduzibel wäre. So gilt mit w = ifCX=XO :
$\{w_{\mathcal{B}} \neq X_{\mathcal{B}}\} = \{\vartheta_0\}$ nicht offen.

Lemma II
Die Topologie γ auf $\mathcal{B} = (\vartheta_x)_{x \in \mathbb{R}}$ ist irreduzibel.

Beweis: Zur Bildung von γ werden = und if nicht berücksichtigt. Neben den totalen nullstelligen Operationen gibt es die üblichen reellen Verknüpfungen. $\mathcal{B}$ kann dann wie bei Strassen ([19] ,Beispiel 1, S.76) mit $\mathbb{R}$ identifiziert werden. Strassen zeigt dort, daß die 4 Grundrechenoperationen auf $\mathbb{R}$ die reelle Zariski-Topologie $\mathcal{Z}$ induzieren , die irreduzibel ist.
qed.

Nähme man das Gleichheitszeichen bei der Bildung der Wortalgebra ohne Verzweigungen hinzu, so wäre γ bereits nicht mehr irreduzibel :
Mit w = =*XXO "x^2=0"
und w' = =-*XX1O "x^2-1=0"
liegt $\{w_{\mathcal{B}} \neq w'_{\mathcal{B}}\} = \{\vartheta_1, \vartheta_{-1}\}$ nicht dicht in $\mathcal{B}$.

Lemma III

Für $w \in W^*$ mit Def $w_{\mathfrak{B}} \neq \emptyset$,das nicht mit "=" beginnt,gilt:

(i) Entweder stimmt $w_{\mathfrak{B}}$ auf Def $w_{\mathfrak{B}}$ mit $C_{\mathfrak{B}}$ überein ,

(ii) Anderenfalls existiert ein $w' \in W$,so daß $w_{\mathfrak{B}}$ auf einer offenen Menge $U \neq \emptyset$ mit $w'_{\mathfrak{B}}$ übereinstimmt und auf $\mathfrak{B} \setminus U$ entweder mit $C_{\mathfrak{B}}$ übereinstimmt oder nicht erklärt ist.

Beweis durch Induktion über $\tau(w)$:

Für $\tau(w)=1$ liegt w bereits in W .

Für $\tau(w)=2$,das ist die kleinste Tiefe für Worte mit Selektor if , habe w die Darstellung

$w = \mathrm{if} w_1 w_2 w_3$ mit $w_1 = C$, $w_2 = /uv$, $w_3 = =v0$; $u,v \in W$.

Die Worte u und v können wegen $\tau(w)=2$ keinen Selektor enthalten ; u und v sind nullstellig , daher stimmen $u_{\mathfrak{B}}$ und $v_{\mathfrak{B}}$ entweder auf ganz $\mathfrak{B}$ oder gar nicht überein. Dann stimmt $w_{\mathfrak{B}}$ auf ganz $\mathfrak{B}$ mit $(w_1)_{\mathfrak{B}}$ überein oder es stimmt auf Def $(w_2)_{\mathfrak{B}}$ mit $(w_2)_{\mathfrak{B}}$ überein und ist sonst nicht definiert.

Für alle $w' \in W^*$ mit $\tau(w') \leq n-1$ sei die Behauptung bewiesen und es gelte $\tau(w)=n$.

(a) Sei $w = \omega w_1 w_2$ mit $\omega \in \{+,-,*\}$.

Ist Def $(w_i)_{\mathfrak{B}}$ dünn für ein $i \in \{1,2\}$, so ist Def $w_{\mathfrak{B}} = \emptyset$ nach Induktionsvoraussetzung, denn sonst müßte $(w_i)_{\mathfrak{B}}$ auf Def $(w_i)_{\mathfrak{B}}$ mit $C_{\mathfrak{B}}$ übereinstimmen.

Seien Def $(w_i)_{\mathfrak{B}}$ nicht dünn für i=1,2 . Nach Induktionsvoraussetzung stimmen $(w_i)_{\mathfrak{B}}$ auf offenen Mengen $U_i \neq \emptyset$, i=1,2 , mit $(w'_i)_{\mathfrak{B}}$ überein. Ist ein $w'_i = C$,so ist Def $w_{\mathfrak{B}} = \emptyset$.

Anderenfalls sei $w' := \omega w_1' w_2'$. Dann ist Def $w_\beta' = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, da γ irreduzibel ist. w_β stimmt auf $U_1 \cap U_2$ mit w_β' überein und ist sonst nicht erklärt.

(b) $w = /w_1 w_2$

Seien w_1', w_2', w', U_1 und U_2 wie unter (a) gegeben.
Dann ist Def $(w_2')_\beta \neq \emptyset$ wegen Def $w_\beta \neq \emptyset$, also ist
$U := \{(w_2')_\beta \neq 0_\beta\}$ nicht leer. Auf $U \cap$ Def $(w_1')_\beta$ stimmt w_β dann mit w_β' überein, außerhalb ist w_β nicht erklärt.

(c) Sei $w = \text{if} w_1 w_2 w_3$ mit $w_2 = /uv$ und $w_3 = =v0$.

Wegen Def $w_\beta \neq \emptyset$ können Def u_β und Def v_β als nicht leer angenommen werden. Def v_β kann nach Induktionsvoraussetzung sogar als nicht dünn vorausgesetzt werden. Dann gilt Def $v_\beta' \neq \emptyset$, wobei $v' \in W$ so gewählt sei, daß v_β und v_β' auf $V \neq \emptyset$ übereinstimmen. Auf V stimmt dann $(w_3)_\beta$ mit $(w_3')_\beta$ überein, wobei $w_3' = =v'0$ auf V und sonst nicht erklärt. Es ist V = Def $(w_3)_\beta$ = Def $(w_3')_\beta$ = Def v_β' . Wir unterscheiden 2 Fälle :

<u>1.Fall</u> $\{v_\beta' \neq 0_\beta\} = \emptyset$

Dann nimmt v_β' auf V immer den Wert 0 an und es wird auf ganz Def $(w_3)_\beta$, und damit auf ganz Def w_β , nach w_1 verzweigt. Dort kann höchstens c_x angenommen werden.

<u>2.Fall</u> $\{v_\beta' \neq 0_\beta\} = \emptyset$

Dann wird auf der offenen Menge $\overline{U} := \{v_\beta' \neq 0_\beta\}$ nach w_2 verzweigt. Da $(w_2)_\beta$ nirgends den Wert c_x annehmen kann, existiert nach Induktionsvoraussetzung ein $w_2' \in W$ und eine offene Menge $U_2 \neq \emptyset$ so daß $(w_2)_\beta$ mit $(w_2')_\beta$ auf U_2

übereinstimmt und außerhalb von U_2 nicht erklärt ist. Damit stimmt $w_{\mathcal{B}}$ auf $\overline{U} \cap U_2$ mit $(w_2')_{\mathcal{B}}$ überein. Da $\mathcal{T}$ irreduzibel ist , ist $\overline{U} \cap U_2$ nicht leer. Außerhalb von $\overline{U} \cap U_2$ kann $w_{\mathcal{B}}$ höchstens mit $(w_1)_{\mathcal{B}}$ übereinstimmen (wenn dies erklärt ist) und demnach nur mit $C_{\mathcal{B}}$ übereinstimmen.

qed.

Für Worte $w = \text{if} w_1 w_2 w_3$ mit Def $w_{\mathcal{B}} \neq \emptyset$ schließt man nun mit den Ergebnissen aus Lemma III (c) :

1.Fall aus III (c)

$\{w_{\mathcal{B}} \neq (w_1)_{\mathcal{B}}\} = \emptyset$, da $w_{\mathcal{B}}$ auf ganz Def $w_{\mathcal{B}}$ nach w_1 verzweigt .

$\{w_{\mathcal{B}} \neq (w_2)_{\mathcal{B}}\} = \emptyset$ wegen Def $w_{\mathcal{B}} \cap$ Def $(w_2)_{\mathcal{B}} = \emptyset$

2.Fall aus III (c)

$\{w_{\mathcal{B}} \neq (w_1)_{\mathcal{B}}\} = \overline{U} \cap U_2$

$\{w_{\mathcal{B}} \neq (w_2)_{\mathcal{B}}\} = \emptyset$, da $w_{\mathcal{B}}$ auf ganz Def $(w_2)_{\mathcal{B}}$ nach w_2 verzweigt.

Also sind die Mengen $\{w_{\mathcal{B}} \neq (w_i)_{\mathcal{B}}\}$ offen bezüglich $\mathcal{T}$ für i=1,2. Damit ist $\mathcal{B}$ auch unter der Topologie $\mathcal{T}^*$ irreduzibel und die Sätze 7.3 und 7.4 können angewendet werden.

Es zeigt sich, daß die Hinzunahme einiger weiterer Operationen auf reellen Zahlen die Zariski-Topologie zerstören würde :

a) $\alpha_{11} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erklärt durch $\alpha_{11}(x) := |x|$.
Es gilt: $\{X_{\mathcal{B}} \neq (|X|)_{\mathcal{B}}\} = \{\mathcal{U}_x : x < 0\}$ ist nicht leer, liegt aber nicht dicht in $\mathcal{B}$, was ein Widerspruch zu (6.4.2) ist. Eine Palgebra $\mathcal{U}_x$ mit der Operation α_{11} erfüllt bereits

Definition 1.2, wenn man die Verzweigungsoperation α_{if} streicht ; also ist dann schon γ nicht irreduzibel und man kann für Programme, die die Operation $\alpha_{||}$ benutzen, nicht den Satz von Strassen ([19] , Satz 8.4) anwenden.

b) $\alpha_< : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \{WAHR, FALSCH\}$ wie in Beispiel 2.6 . Mit $\alpha_<$ kann man in Verbindung mit $\alpha_=$ zum Beispiel abfragen, ob x in einem bestimmten Intervall liegt . Offenbar wird nach einer Abfrage $\alpha_<(a,b)$ in zwei nicht dünnen Teilmengen von $\mathcal{B}$ in verschiedene Richtungen verzweigt und γ^* ist nicht mehr irreduzibel.

c) $\alpha_{sign} : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1,-1\}$ zerstört ebenfalls die Irreduzibilität von γ, denn
$\{(\text{sign } X)_{\mathcal{B}} \neq 1_{\mathcal{B}}\} \cap \{(\text{sign } X)_{\mathcal{B}} \neq (-1)_{\mathcal{B}}\} = \{\vartheta_0\}$
wäre ein Widerspruch zu (6.4.1) .

d) $\alpha_{\lfloor\rfloor} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erklärt durch $\alpha_{\lfloor\rfloor}(x) := \lfloor x \rfloor$
$\{(\lfloor\rfloor X)_{\mathcal{B}} \neq 0_{\mathcal{B}}\} = \{\vartheta_x : x \in \mathbb{R} \setminus [0,1)\}$ liegt nicht dicht in $\mathcal{B}$, daher ist (6.4.2) nicht erfüllt .

e) Die Sätze 7.3 und 7.4 gelten nicht, wenn eine Intervallabfrage durch Verzweigungsoperationen möglich ist : Berechnet man in verschiedenen Intervallen verschiedene Funktionen, so sind die Kosten der Berechnung durch die Abfrage und die Funktion maximaler Länge gegeben. Die entsprechende Berechnung ohne Verzweigungen dagegen muß jede der Funktionen berechnen.

Beispiel 7.6

Es soll eine Berechnung angegeben werden, die den größten gemeinsamen Teiler gcd zweier natürlicher Zahlen $n_1 \geq n_2$ berechnet. Ein Input ist dann die $\{n_1,n_2\}$-Expansion von $\mathbb{N}'$, alle diese Expansionen mit $n_1 \geq n_2 > 0$ werden zu einem System $\mathfrak{B}$ partieller Algebren zusammengefaßt.
Ein Programm, das $gcd(n_1,n_2)$ für alle Inputs berechnet, ist durch den folgenden Algorithmus dargestellt :

(E) (n_1,n_2) Input

1. gcd := n_1 ; d := n_2 ;
2. Berechne Quotient q und Rest r , so daß
   gcd = d*q + r mit $0 \leq r < d$;
3. gcd := d ; d := r ; falls $d \neq 0$, gehe zu 2. ;
4. STOP Ausgabe : gcd

Für (n_1,n_2) gebe $l(n_1,n_2)$ die Anzahl der unter 2. ausgeführten Divivionen an, also die Schrittzahl bei der Berechnung von $gcd(n_1,n_2)$.
Sei $\Omega = \{\%,\div,*,n_1,n_2\}$, $I = \{1\}$. q und z seien erklärt durch : n_1,n_2 nullstellig ; $\%,\div,*$ zweistellig .
$\triangle=(\Omega,I,q,z)$, $W(\triangle)$ sei die $\triangle$-Wortalgebra .

Sei $P := \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \geq n\}$
Für $(m,n) \in P$ sei $\mathfrak{A}_{(m,n)} = (\{\mathbb{N}'\},\{\alpha_\omega : \omega \in \Omega\})$ eine partielle Algebra mit :

$(m,n) \in Def\ \alpha_\% \iff n \neq 0$,in diesem Fall sei
$\alpha_\%(m,n) := \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ (ganzzahlige Division)

$(m,n) \in Def\ \alpha_\div \iff m \geq n$, in diesem Fall sei

$\alpha_{-}(m,n) := m - n$ (partielle Subtraktion) .

α_{*} sei die Multiplikation und $\alpha_{n_1}(\emptyset) := m$, $\alpha_{n_2}(\emptyset) := n$.

$\mathcal{B} := (\mathcal{O}_{(m,n)})_{(m,n)\in P}$ ist dann ein System von $\triangle$-Halgebren.

Lemma I

Die Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{B}$ ist nicht irreduzibel.

Beweis: Sei $w = \%n_1 \div n_2 \%n_1 n_2$

Dann ist , falls erklärt : $f_{\mathcal{O}_{(m,n)}}(w) = \left\lfloor \frac{m}{n - \lfloor \frac{m}{n} \rfloor} \right\rfloor$

Es ist Def $w_{\mathcal{B}} = \left\{ \mathcal{O}_{(m,n)} \in \mathcal{B} : \quad n > \lfloor \frac{m}{n} \rfloor \right\} \neq \emptyset$.

Sei $w' := \div \%n_1 n_2 n_2$. Dann ist, falls erklärt :

$$f_{\mathcal{O}_{(m,n)}}(w') = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor - n$$

Mit Def $w'_{\mathcal{B}} = \left\{ \mathcal{O}_{(m,n)} \in \mathcal{B} : \lfloor \frac{m}{n} \rfloor \geq n \right\} \neq \emptyset$ gilt

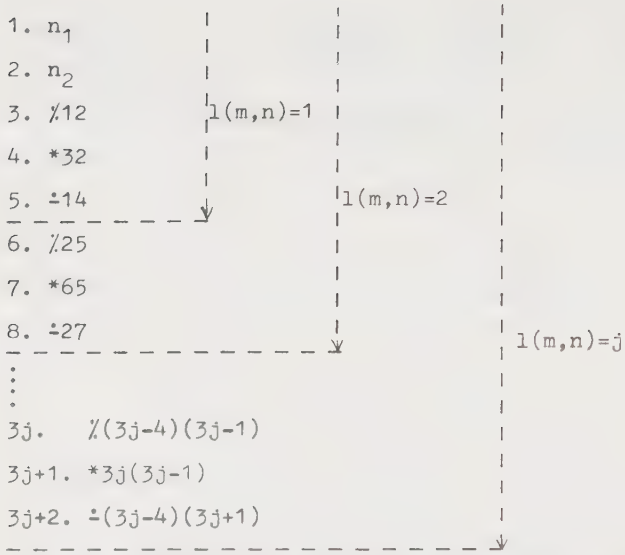
Def $w_{\mathcal{B}} \cap$ Def $w'_{\mathcal{B}} = \emptyset$, daher ist $\mathcal{T}$ nicht irreduzibel. qed.

Lemma II

Für jedes Paar $(m,n) \in P$ gibt es eine Berechnung β, die gcd(m,n) berechnet mit $L(\beta) = l(m,n) \cdot (t(\%)+t(*)+t(\div))$.

Beweis: Für $(m,n) \in P$ ist nach Dixon [7] $l(m,n) < \infty$.

Wir geben β als Rechenschema an, wobei ωjk die Verknüpfung der Rechenschritte j und k durch ω bedeutet .



Die zum Rechenschema gehörende Berechnung β berechnet die Folge der Reste r und für l(m,n)=j somit gcd(m,n). Die Länge $L(\beta)$ liest man direkt aus dem Rechenschema ab.

qed.

In einer Wortalgebra mit zusätzlichen Selektoren kann man Berechnungen angeben, die auch die Abfrage unter (E,3) enthalten :

Dazu sei $\Omega' := \Omega \cup \{=, if, 0, C\}$ mit $\alpha_=, \alpha_{if}, \alpha_0, \alpha_C$ wie in Beispiel 7.5 ,die Palgebren $\mathcal{G}_{(m,n)}$ werden um diese Operationen erweitert. $f_{\mathcal{G}_{(m,n)}}(M)=c$ bewirke die Meldung,daß gcd(m,n) durch M nicht berechenbar ist.

Lemma III

Zu jedem $j \in \mathbb{N}$ gibt es eine Berechnung $M = \{w\}$ mit Verzweigungen , für die gilt :

(i) $w = y$ if u C =v0 z mit $y,z \in (\Omega' \setminus C)^*$

(ii) $$f_{\mathcal{A}_{(m,n)}}(M) = \begin{cases} \gcd(m,n) & \text{für } l(m,n) \leq j \\ c & \text{sonst} \end{cases}$$

(iii) $L^*(M) = j \cdot (t(\%)+t(*)+t(\dot{-})+t(=)+t(\text{if}))$

Beweis durch Induktion über j:

Bei j=1

Mit w := if n_2 C =$\dot{-}n_1$*%$n_1n_2n_2$0 ,y=z=ε , ist $l(m,n)=1$ genau dann , wenn $n \mid m$. In diesem Fall ist der Rest nach einer Division 0 und es gilt

$f_{\mathcal{A}_{(m,n)}}(M) = f_{\mathcal{A}_{(m,n)}}(n_2) = n = \gcd(m,n)$, sonst gilt $f_{\mathcal{A}_{(m,n)}}(M) = c$.

w' = y if u C =v0 z berechne $\gcd(m,n)$ für $l(m,n) \leq j-1$ und erfülle (ii),(iii) . Ein weiterer Schritt des Algorithmus (E) wird dann simuliert, indem C aus w' ersetzt wird durch if v C =$\dot{-}u$*%uvv0 . Das entstehende Wort w = y if u if v C =$\dot{-}u$*%uvv0 =v0 z erfüllt dann (i)-(iii).

qed.

$\mathcal{Y}^*$ ist nicht irreduzibel, da bereits $\mathcal{Y}$ nicht irreduzibel ist. Dennoch kann man aus den Lemmata II und III folgern : für berechenbare Mengensysteme $(B_{(m,n)})$ mit $B_{(m,n)} = \gcd(m,n)$ oder $B_{(m,n)} = \emptyset$ gilt der Hauptsatz für Berechnungen mit Verzweigungen, denn die in Lemma II angegebene Berechnung berechnet alle $\gcd(m,n)$ für $l(m,n) \leq j$. Dies geschieht allerdings nur in dem Sinn, daß $\gcd(m,n)$ eines der Ergebnisse von $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{A}_{(m,n)}$ ist. Die Berechnung

mit Verzweigungen aus Lemma III ist hier deutlich überlegen, denn sie liefert entweder genau das Ergebnis oder die Meldung, daß die Menge M gcd(m,n) nicht berechnet.

Dixon [7] gibt für einen vorgegebenen Input eine obere Schranke für l(m,n) an. Danach gilt zum Beispiel $l(m,n) \leq 25$ für $n = 10^5$. Da man auf Rechenanlagen immer eine obere Schranke für integer-Zahlen hat, kann man mit Lemma III eine Berechnung mit Verzweigungen angeben, die ein Programm zur Berechnung von gcd(m,n) simuliert. Die Rechenzeit L* gibt dann die maximale Dauer des Programms an, wobei die Anzahl der Prozessoren keine Rolle spielt, denn für M aus Lemma III gilt $L^*(M)=T(M)$.

8. Näherungsberechnungen und Anwendungen

Die bisherigen Aussagen über Berechnungen von Mengensystemen setzen Berechnungen voraus, die die Mengensysteme exakt berechnen. Das führt zu einem Berechnungsbegriff, der zum Beispiel innerhalb der reellen Zahlen nur Polynome und rationale Funktionen erfaßt (falls die 4 Grundrechenoperationen zur Verfügung stehen), für Funktionen aber im allgemeinen nicht geeignet ist. Da man Funktionswerte in der Praxis nur bis auf eine vorgegebene Genauigkeit $\varepsilon > 0$ wird berechnen wollen, wird ein Berechnungsbegriff eingeführt, die sogenannten ε-Näherungsberechnungen, der auch für Funktionen geeignet ist. Mit diesen ε-Näherungsberechnungen kann man zum Beispiel die folgende Aufgabe beschreiben :
Eine Funktion $f \in C[a,b]$, $a,b \in R$, die kompliziert aufgebaut oder ein Polynom hohen Grades sein kann, soll durch eine einfachere Funktion g näherungsweise dargestellt werden, so daß zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gilt :

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x)-g(x)| < \varepsilon .$$

Mit der Konzeption der ε-Berechnungen mit Verzweigungen kann man $[a,b]$ in weitere Intervalle $a=x_1 < x_2 < .. < x_n=b$ einteilen und für jedes Intervall $[x_i,x_{i+1}]$ in eine Funktion $g_i(x)$ verzweigen mit

$$\max_{x \in [x_i,x_{i+1}]} |f(x)-g_i(x)| < \varepsilon \qquad \text{für } 1 \leq i \leq n-1 .$$

Eine Intervallabfrage kann man zum Beispiel mit Hilfe der Operationen $\alpha_=, \alpha_<$ und α_σ aus Beispiel 2.6 realisieren.
In diesem Kapitel werden Begriffe aus einer Arbeit von Kinnebrock [22] mit benutzt.

Definition 8.1

Sei Δ^* ein Typ mit Verzweigungen. $(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ heißt System von metrischen Δ^*-Palgebren (mit Verzweigungen) , wenn jedes $\mathfrak{A}_j =: (\{A_j^i : i\in I\}, \{\alpha_\omega^j ; \omega\in\Omega\})$ eine Δ^*-Palgebra mit Verzweigungen ist und wenn gilt :
Es gibt einen Index $i\in I$ mit $A_j^i = R$ für alle $j\in J$ und R ist ein metrischer Raum mit der Abstandsfunktion δ .

Definition 8.2

Sei $(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ ein System von metrischen Δ^*-Palgebren ; $A_j := \bigcup_{i\in I} A_j^i$ und $B_j\in\mathcal{E}(A_j)$. Eine Wortmenge $M\in\mathcal{E}(W^*)$ heißt ε-Näherungsberechnung oder kurz : ε-Berechnung (mit Verzweigungen) für B_j , wenn gilt :

(i) $f_{\alpha_j}(M)\supset(B_j\setminus R)$ falls $B_j\setminus R\neq\emptyset$

(ii) zu jedem $v\in B_j\cap R$ gibt es ein $w\in M$ mit $f_j(w)\in R$ und $\delta(f_j(w),v)<\varepsilon$

M heißt ε-Berechnung für das Mengensystem $(B_j)_{j\in J}$, wenn M für alle $j\in J$ eine ε-Berechnung für B_j ist. $(B_j)_{j\in J}$ heißt dann ε-berechenbar .

Definition 8.3

Sei $(B_j)_{j\in J}$ ein ε-berechenbares Mengensystem. Dann seien

$L_\varepsilon^*((B_j)) := \min\{L^*(M) : M\in\mathcal{E}(W^*)$ ist ε-Berechnung für $(B_j)\}$

$T_\varepsilon^*((B_j)) := \min\{T^*(M) : M\in\mathcal{E}(W^*)$ ist ε-Berechnung für $(B_j)\}$

Lemma 8.4

(i) Sei (B_j) berechenbar. Dann ist (B_j) für alle $\varepsilon>0$ ε-berechenbar und es gilt

$$L^*_\varepsilon((B_j)) \leq L^*((B_j)) \quad \text{und} \quad T^*_\varepsilon((B_j)) \leq T^*((B_j)) .$$

(ii) Sei (B_j) ε-berechenbar. Dann ist (B_j) für alle ε_1 mit $\varepsilon_1 \geq \varepsilon > 0$ ε_1-berechenbar und es gilt

$$L^*_{\varepsilon_1}((B_j)) \leq L^*_\varepsilon((B_j)) \quad \text{und} \quad T^*_{\varepsilon_1}((B_j)) \leq T^*_\varepsilon((B_j)) .$$

Beweis: Ist (B_j) berechenbar, so existiert ein $M \in \mathcal{E}(w^*)$ mit $L^*(M)=L^*((B_j))$ und $f_{\mathcal{O}_i}(M) \supset B_j$, falls $B_j \neq \emptyset$. Dann ist 8.2(i) erfüllt ; 8.2(ii) gilt für alle $\varepsilon>0$, da zu $v \in B_j \cap R$ bereits ein $w \in M$ existiert mit $f_{\mathcal{O}_j}(w)=v$ .Damit ist M für jedes $\varepsilon>0$ eine ε-Berechnung für (B_j), woraus (i) folgt.

Sei (B_j) ε-berechenbar und $\varepsilon_1 \geq \varepsilon > 0$. Jede ε-Berechnung für (B_j) ist nach Definition 8.2 auch eine ε_1-Berechnung für (B_j), woraus mit Definition 8.3 die Behauptung folgt.

ged.

Das Lemma besagt, daß eine höhere Genauigkeit einer Berechnung mit einem größeren Aufwand an Rechenzeit erkauft wird. Das folgende Beispiel zeigt, daß der Strassen´sche Satz über Berechnungen und Programme ([19], Satz 8.4) für Näherungsberechnungen nicht gilt :

Beispiel 8.5

Sei $\mathfrak{B}$ das System der $\langle x \rangle$-Expansionen von $\mathbb{R}$ mit $\Omega=\{+,-,*,/\}$.
$\mathfrak{B}$ ist irreduzibel (vergleiche Beispiel 7.5, Lemma II) .

$\mathfrak{B}$ ist ein System von metrischen Palgebren mit der gewöhnlichen Abstandsfunktion δ.

Wir wählen Zahlen $a_i \in (0,1)$ mit $a_i \neq a_k$ für $i \neq k$, $i=1,..,n$.

$f(x) := \prod_{i=1}^{n} (x-a_i)$ hat auf dem Intervall $[0,1]$ n Nullstellen . Das Mengensystem $(B_x)_{x \in \mathbb{R}}$ mit

$$B_x := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in [0,1] \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

ist berechenbar und somit ε-berechenbar für alle $\varepsilon > 0$.

Da $f(x)$ n Nullstellen besitzt, kann man ein geeignetes $\varepsilon > 0$ wählen, so daß für eine ε-Näherungsberechnung von (B_x) mindestens ein Polynom n-ten Grades benötigt wird, zum Beispiel $f(x)$ selbst. Da man auf $f(x)$ das Horner-Schema anwenden kann, kann man für eine optimale Berechnung β (ohne Verzweigungen), die jedes B_x in $\mathfrak{N}_x$ bis auf ε genau berechnet, folgern :

$L(\beta) \leq n \cdot (t(\pm) + t(*))$

Andererseits sind zur Auswertung eines Polynoms n-ten Grades mindestens n Additionen/Subtraktionen und $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ Multiplikationen/Divisionen nötig (Knuth [9], Pan [14]) .

Damit folgt

$n \cdot t(\pm) + (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) \cdot t(*) \leq L(\beta) \leq n \cdot t(\pm) + n \cdot t(*)$

Es ist $f \in C^4[0,1]$ und $f^{(4)}(x)$ ist auf $[0,1]$ beschränkt .

Sei $c := \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)|$. Wähle $h := \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{c}}$ und Gitter

$\mathcal{G}: 0 = x_0 < x_1 < .. < x_m = 1$ mit der Gitterweite h .

Dann gilt nach Böhmer [3] :

Es existiert ein kubischer Interpolationsspline

$s: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ bezüglich $\mathcal{G}$ mit $\max_{x \in [0,1]} |s(x)-f(x)| < \varepsilon$.

Man kann daher ein Programm aufstellen, das $(B_x)_{x\in\mathbb{R}}$ überall bis auf ε genau berechnet und 3 Additionen/Subtraktionen, 3 Multiplikationen und die Kosten der Verzweigung benötigt, und damit für hinreichend große n sicherlich schneller als β ist. Da $[0,1]\subset\mathbb{R}$ bezüglich der Zariskitopologie nicht dünn ist, kann der Strassen'sche Satz nicht für Näherungsberechnungen gelten. Der Hauptsatz für Berechnungen mit Verzweigungen gilt dagegen auch für Näherungsberechnungen :

Satz 8.6

Sei $\mathfrak{B}=(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ ein irreduzibles System von metrischen Palgebren mit Verzweigungen; t sei eine Operationszeit mit $t(\omega)>0$ für $s(\omega)>0$. $\varepsilon>0$ sei gegeben und (B_j) sei ein ε-berechenbares Mengensystem. Dann existiert eine Berechnung β ohne Verzweigungen, die fast überall (B_j) bis auf ε genau berechnet und für die gilt

$$L(\beta) \leq L^*_\varepsilon((B_j)) \quad .$$

Beweis: Sei $M\in\mathcal{E}(W^*)$ gegeben mit $L^*(M)=L^*_\varepsilon((B_j))$.

$$\overline{B}_j := \begin{cases} f_{\mathfrak{A}_j}(M) & \text{falls erklärt} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

(i) Für $j\in J$ gilt $\overline{B}_j \supset (B_j\setminus R)$ und zu jedem $b\in B_j\cap R$ existiert ein $\overline{b}\in\overline{B}_j$ mit $\delta(\overline{b},b)<\varepsilon$, da M eine ε-Berechnung für (B_j) ist .

Wie im Beweis von Satz 7.4 gibt es jetzt eine Berechnung β ohne Verzweigungen, die $\overline{B}_j$ fast überall berechnet und für die gilt : $L(\beta)\leq L^*(M)$.

β berechnet (B_j) wegen (i) fast überall bis auf ε genau.
qed.

Satz 8.6 widerspricht dem Beispiel 8.5 nicht, denn Intervallabfragen zerstören die Irreduzibilität der Topologie $\mathcal{Z}$. Programme für ε-Näherungsberechnungen von Funktionen kann man durch ε-Berechnungen mit Verzweigungen simulieren : in Abhängigkeit vom Input wird in eine ε-Berechnung verzweigt. Die Intervallabfrage kann zum Beispiel durch sukzessive Intervallteilung und Anwendung der Vergleichsoperation $\alpha_{\leq}$ in Verbindung mit der dreistelligen Auswahloperation α_{σ} dargestellt werden.

(*) Ist $[a,b]$ in m gleich große Intervalle eingeteilt und wird im i-ten Intervall nach $g_i(x)$ verzweigt, so kann man auch zu vorgegebenem Input x die Funktion $g_{\lfloor (x-a)m+1 \rfloor}$ an der Stelle x auswerten.

$\alpha_{\leq}$ und α_{μ} zerstören die Irreduzibilität der Topologie $\mathcal{Z}$ (vergleiche Beispiel 7.5) .

Beispiel 8.7

Näherungsberechnung von exp(x) auf $[0,1]$

8.7.1 exp(x) als Standardfunktion auf der UNIVAC 1108

(a) Zu einem Input x wird $w = \frac{x}{\ln 2} = n + \frac{m}{4} + t$ mit $n,m \in \mathbb{N}'$, $0 \leq m \leq 3$ und $0 \leq t < \frac{1}{4}$ berechnet. Dabei kann ln 2 als nullstellig angesehen werden. Dann berechnet man exp(x) durch

$$\exp(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < 2^{-26} \\ 0 & \text{für } x < -88{,}028 \\ \text{(Fehler)} & \text{für } x > 88{,}028 \\ 2^n \cdot 2^{\frac{m}{4}} \cdot 2^t & \text{sonst} \end{cases}$$

$2^{\frac{m}{4}}$ kann als nullstellig angesehen werden ; die Berechnung von 2^n erfolgt durch Shiften ($\ll t(+)$, vernachlässigbar) .

(b) Approximation von 2^t durch $\frac{Q(t^2) + t \cdot P(t^2)}{Q(t^2) - t \cdot P(t^2)}$ mit linearen Polynomen Q und P.

Komplexität: (a) 3 MUL/DIV
(b) 4 ADD/SUB
5 MUL/DIV

Die Abfrage $|x| < 2^{-26}$ kann man als isolierte Abfrage x=0 auffassen und man hat auf [0,1] praktisch eine Berechnung ohne Verzweigungen, deren Länge man etwa mit 8 MUL/DIV-Operationen und 4 ADD/SUB-Operationen ansetzen kann.
Der relative Fehler ist höchstens $\varepsilon = 0{,}74 \cdot 10^{-8}$, daraus ergibt sich der maximale Fehler bei einfacher Genauigkeit zu einem bit .

8.7.2 Reihenentwicklung von exp(x)

Für die unter (8.7.1) erzielte Genauigkeit werden 12 Summanden der Reihenentwicklung von exp(x) benötigt ; dann sind zur Auswertung mindestens

12 ADD/SUB und
7 MUL/DIV -Operationen nötig.

8.7.3 Berechnung einer spline-Funktion für exp(x)

Wählt man die Gitterweite $h := \frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$, so erzielt man mit einem kubischen Interpolationsspline der Funktion exp(x) eine Genauigkeit von $\varepsilon \approx 0{,}2\cdot 10^{-8}$ (Böhmer [3]) .Die Verzweigung unter (*) kostet etwa 2 ADD/SUB-Operationen und 2 MUL/DIV-Operationen.Hinzu kommen 3 ADD/SUB-Operationen und 3 MUL/DIV-Operationen für die Polynomauswertung,denn das Horner-Schema ist für n=3 optimal (Ostrowski [13]) .

Die unter (8.7.3) angegebene Näherungsberechnung mit Verzweigungen in bezug auf die Rechenzeit günstiger als die Berechnung (8.7.1). Der für die nullstellig erzeugten Elemente benötigte Speicherplatzbedarf ist aber recht unterschiedlich :

(8.7.1) 8 Speicherplätze (ln 2, $2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{3}{4}}$, 4 Koeffizienten)

(8.7.2) 13 Speicherplätze

(8.7.3) 800 Speicherplätze

Beispiele für Näherungsberechnungen mit Verzweigungen von Standardfunktionen auf der UNIVAC 1108 :

(a) DTANH (x) (double precision hyperbolic tangent)

$$\tanh(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x & 0 < |x| < 2^{-30} \\ \dfrac{x^3 \cdot P(x^2)}{Q(x^2)} & 2^{-30} \leq |x| \leq 0{,}55 \\ 1 - \dfrac{2}{1+e^{2x}} & 0{,}55 < |x| < 22 \\ 1 & x \geq 22 \\ -1 & x \leq -22 \end{cases}$$

Dabei gilt : grad(P) = 4, grad(Q) = 5 und $\varepsilon = 0{,}2 \cdot 10^{-17}$.

(b) SINH (x) (hyperbolic sine)

$$\sin h(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 2^{-15} \\ P(x^2) & 2^{-15} \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2} \leq x < \ln 2^{15} \\ \frac{1}{2}e^x & \ln 2^{15} \leq x < 88{,}028 \\ \sin h\,(x) & x < 0 \end{cases}$$

Es ist grad(P) = 3 ;der relative Fehler ist $\varepsilon = 0{,}7 \cdot 10^{-8}$.

Das Beispiel 8.5 zeigt zwar, daß man bei einer feineren Intervalleinteilung bei Näherungsberechnungen auf eine kürzere Rechenzeit kommen kann, dieses hat jedoch in den meisten Fällen einen hohen Speicherplatzbedarf zur Folge.

Literaturverzeichnis

[1] Belaga ,E.G. Werteberechnung von Polynomen in einer Veränderlichen mit Koeffizientenvorbereitung
Akademie-Verlag , Berlin 1964

[2] Birkhoff , Lipson Heterogeneous Algebras
Journal of Combinatorial Theory 8,1970

[3] Boehmer,K. Spline-Funktionen
Stuttgart 1974

[4] Borodin ,A. On the number of arithmetics required to compute certain functions
(J.Traub editor) New York 1973

[5] Cohn ,P.M. Universal Algebra
Harper and Row , New York 1965

[6] Collins,G. The computing time of the Euclidean Algorithm , SIAM Journal Computing 1974

[7] Dixon ,J.D. A simple estimate for the number of steps in the Euclidean Algorithm
Amer.Math. Monthly ,78 ,1971

[8] Kerkhoff ,R. Gleichungsdefinierbare Klassen partieller Algebren
Math.Annalen 185 , 1970

[9] Knuth ,D.E. The art of computer programming
Vol II : Seminumerical algorithms
Addison-Wesley 1969

[10] Miller ,W. Computational complexity and numerical stability , Prc.6th annual ACM Symposium on theory of computing 1973

[11] Motzkin ,T.S. Evaluation of polynomials and evaluation of rational functions Bulletin Amer.Math.Soc. 61 , 1955

[12] Mumford ,D. Introduction to algebraic geometry Harvard Lecture Notes , o.J.

[13] Ostrowski ,A. On two problems in abstract algebra connected with Horners Rule Studies in Mathematics and Mechanics New York 1954

[14] Pan ,V. Methods of computing values of polynomials,Russian Math.Surveys 21,1966

[15] Paterson und Stockmeyer Bounds on the evaluation time for rational polynomials IEEE Conference Record of the 12th Annual Symposium of Switching and Automata , 1971

[16] Spieß ,J. Untersuchungen zur Implementierung der Algorithmen von Winograd und Strassen zur Matrizenmultiplikation GWDG-Bericht , Göttingen 1974

[17] Steinhoff ,G. Grundlagen der partiellen heterogenen Algebren Diplomarbeit , Göttingen 1975

[18] Strassen ,V. Berechnung und Programm I
Acta Informatica 1 , 1972

[19] Strassen ,V. Berechnung und Programm II
Acta Informatica 2 , 1973

[20] Strassen ,V. Gaussian Elimination is not optimal
Numerische Mathematik 13 , 1969

[21] Winograd ,S. On the number of multiplications
necessary to compute certain functions
Communications on Pure and Applied
Mathematics 23 , 1970

[22] Kinnebrock Näherungsberechnungen in heterogenen
Palgebren
Unveröffentlichtes Manuskript

Lebenslauf

Am 9.November 1947 wurde ich als zweites Kind des Lehrers Werner Zinn und seiner Ehefrau , Lehrerin Rosemarie Zinn, geborene Timme , in Völksen , Kreis Springe , geboren. Nach dem Besuch der vier Klassen Grundschule wechselte ich 1958 in die Bismarckschule , Gymnasium in Hannover , über. Im September 1966 erhielt ich dort das Reifezeugnis. Von 1966 bis 1968 leistete ich meinen Wehrdienst in Stade, Altenwalde und Munster ab. Das Studium der Mathematik begann ich im Wintersemester 1968/69 an der Georg-August-Universität Göttingen , wo ich im Herbst 1973 die Diplomprüfung ablegte . Seitdem erhalte ich ein Forschungsstipendium von der Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung mbH Göttingen. Im Rahmen dieses Stipendiums fertigte ich die vorliegende Arbeit an unter der Anleitung von Prof.Dr.B.Brosowski , dem ich dafür zu Dank verpflichtet bin.